رئوس مطالب — مدار (۲) — استاد باری

۱ـ عناصر تزویج (سلف خطی تزویج شده)

۲ـ نمودارها و قضیه تلگان

۳ـ تجزیه و تحلیل شبکه دوسر

۴ـ تجزیه و تحلیل حلقه و کات ست

۵ـ معادلات حالت

۶ـ فرکانس های طبیعی

۷ـ پاسخ فرکانسی

۸ـ قضایای شبکه

۹ـ توابع شبکه

۱۰ـ دوقطبی ها

مراجع: ۱ـ نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها — ارنست نو

۲ـ تحلیل مهندسی مدار — ویلیام هیت

امتحان میان ترم — هفته اول اردیبهشت — ۵ـ۳ نمره — شنبه

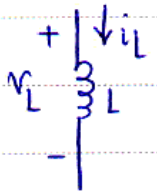
۸۷/۲/۱۴

تکالیف و کار کلاسی ۲ نمره

www.tbi-net.com

سلف‌های تزویج شده :

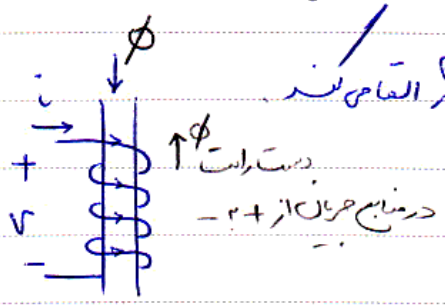
در مدارهای الکتریکی (۱) با سلف آشنا شدیم.



$$v_L = \frac{d(i_L)}{dt} = L\frac{di_L}{dt} + i_L\frac{dL}{dt}$$

در سلف‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان $\frac{dL}{dt} = 0$ $\Leftarrow$ $v_L = L\frac{di_L}{dt}$

در واقع اگر شار متغیر با زمان $\phi(t)$، سیم‌پیچی را در بر بگیرد در آن ولتاژ القا می‌کند.

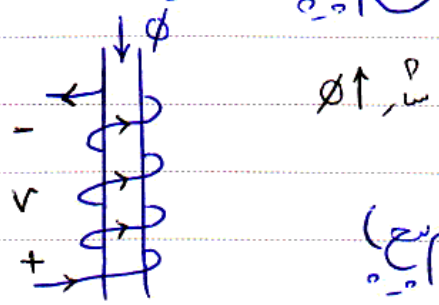


سیم‌پیچ تشکیل یک هسته با مقدار L را می‌دهد.

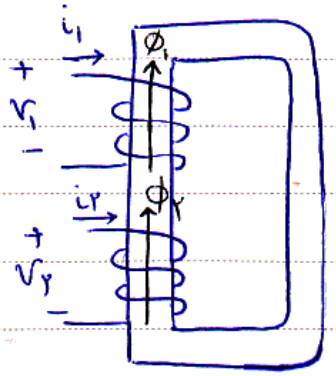
این سیم‌پیچ یک سلف L را تشکیل می‌دهد. بار یا مولد سلف به صورت زیر تعریف می‌شود: $\lambda = Li$

و ولتاژ القایی دو سر سلف عبارت است از: $v = \frac{d\lambda}{dt} \Leftarrow v = \frac{d(Li)}{dt} = L\frac{di}{dt}$

لذا برای ولتاژ القایی بر اساس قانون لنز به نحوی است که جریان عبوری از سیم‌پیچ سبب تولید شاری شود که با شار به وجود آورنده‌اش مخالفت کند.



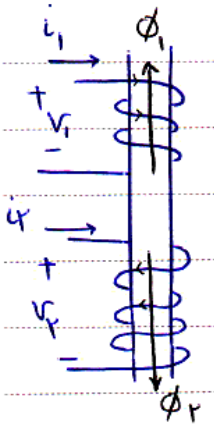
تذکر: با توجه به روابط بحث شده، ولتاژ القایی دو سر یک سلف (سیم‌پیچ) وابسته به شار عبوری از آن است.



حال دو سیم‌پیچ زیر را در نظر بگیرید که روی یک ساقه بسته شده‌اند.

WWW.MOHANDESYAR.COM

کل شار عبوری از هر سیم پیچ (شار منتجه) : $\phi = \phi_1 + \phi_2$



جهت مثبت به سمت بالا $\phi_{\text{شار منتجه}} = \phi_1 - \phi_2$

و می دانیم که ولتاژ دو سر هر سلف به شار عبوری از آن ها مربوط است. در مثال های قبل

شار عبوری از هر سیم پیچ به سیم پیچ دیگر نیز وابسته است. به چنین حالتی که شار عبوری از سیم پیچ ها

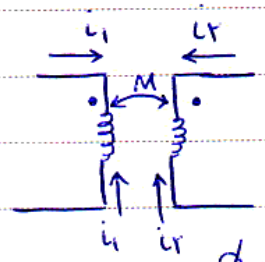
به یکدیگر وابسته باشد سلف های تزویج شده می گوییم. تزویج بین سلف ها می تواند به صورت مثبت یا منفی باشد.

وقتی شار تولیدی یکی موافق با شار تولیدی دیگری باشد تزویج اثر مثبت و در غیر این صورت اثر منفی دارد.

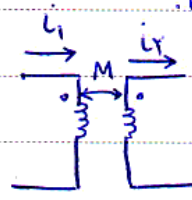
قرارداد در سمبل مدار :

سلف های تزویج شده را با سرهای نقطه دار نشان می دهیم. وقتی ورود یا خروج جریان به سرهای نقطه دار هر دو سلف یکسان

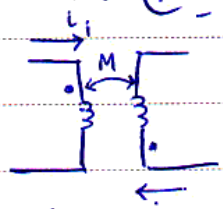
باشد تزویج مثبت و در غیر این صورت تزویج منفی است.



$\phi = \phi_1 + \phi_2$



$\phi = \phi_1 - \phi_2$



$\phi = \phi_1 + \phi_2$

در دو سر سلف تزویج شده با ضریب تزویج M شارهای پیوندی به صورت زیر بیان می شوند :

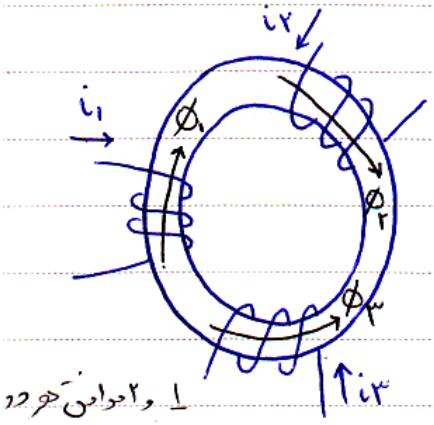
$$\begin{cases} \lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \\ \lambda_2 = \pm M i_1 + L_2 i_2 \end{cases}$$

$$v = \frac{d\lambda}{dt}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \pm M \dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = \pm M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

مثال) سه سلف تزویج شده زیر را در نظر بگیرید.



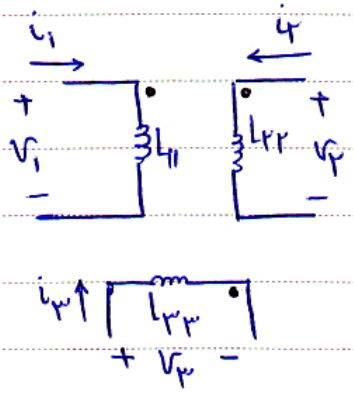
۱ و ۲ موافق هم و با ۳ مخالف.

ماتریس اندوکتانس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix}$$

عناصر قطری، اندوکتانس های خودی و عناصر غیر قطری، اندوکتانس های متقابل است.

با تعیین سرهای نقطه دار و سمبل بدارای این سه سلف روابط ولتاژ را می‌نویسیم:



$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} - L_{13} \frac{di_3}{dt}$$

$$v_2 = L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt} - L_{23} \frac{di_3}{dt}$$

$$v_3 = -L_{13} \frac{di_1}{dt} - L_{23} \frac{di_2}{dt} + L_{33} \frac{di_3}{dt}$$ با ۱ و ۲ مخالف

$$\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$$

مثال روابط در حوزه فازور به صورت زیر خواهد بود:

$$v_1 = (L_{11} j\omega) i_1 + (L_{12} j\omega) i_2 - (L_{13} j\omega) i_3$$

$\vdots$

WWW.MOHANDESYAR.COM

موازی و جهت جریان خلاف

$\lambda_1 = -\lambda_2$

$\lambda_2 = -i_1 + 4i_2 - i_3$

$\lambda_3 = 2i_1 - i_2 + 3i_3$

$3i_1 - i_2 + 2i_3 = i_1 - 4i_2 + i_3$

$\longrightarrow 2i_1 + 3i_2 = -i$ (1)

سری ها $\lambda = \lambda_1 + \lambda_3$ یا $\lambda = -\lambda_2 + \lambda_3$

$\lambda = 5i_1 - 2i_2 + 5i$ (2) $\qquad i = i_1 - i_2$ (3) $\longrightarrow i_1 = i + i_2$

جایگذاری در (1) و (2) :

$2i + 2i_2 + 3i_2 = -i \longrightarrow 3i = -5i_2$

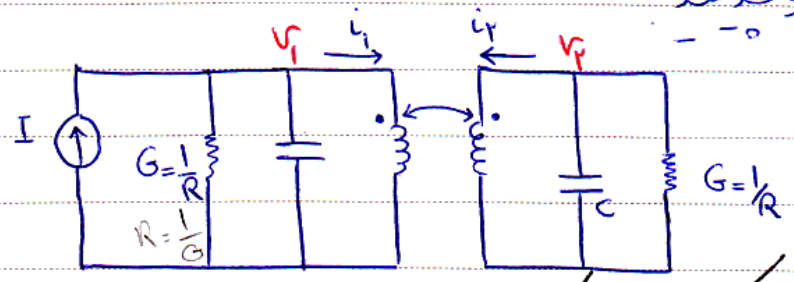
$i_2 = -\frac{3}{5} i$

$\lambda = 5(i - \frac{3}{5} i) - 2\times(-\frac{3}{5} i) + 5i$ $\qquad \lambda = 2i + \frac{6}{5} i + 5i$

i_1

$\lambda = \frac{41}{5} i \longrightarrow \boxed{L_{eq} = \frac{41}{5}}$

مثال) V_1 و V_2 را با استفاده از آنالیز گره بدست آورید؟



$L = \begin{bmatrix} L & LK \\ LK & L \end{bmatrix}$

در سلف های موازی راحت تر از ضریب القای معکوس استفاده کنیم.

$\Gamma = \frac{L}{L^2(1-K^2)} \begin{bmatrix} 1 & -K \\ -K & 1 \end{bmatrix}$

حل در حوزه فازور:

$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{فازور}} j\omega \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{فازور}} \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}$

خازن $\times C \longrightarrow \frac{1}{j\omega C}$ $\qquad \lambda \longrightarrow V$ در فازور

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\Gamma = \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

در دو سلف تزویج شده

$$\begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}(j\omega)V_1 + \Gamma_{12}(j\omega)V_2 \\ i_2 = \Gamma_{12}(j\omega)V_1 + \Gamma_{22}(j\omega)V_2 \end{cases}$$

$$KCL: \quad I = V_1 G + V_1 C\omega j + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}(V_1 - kV_2)$$

$$KCL: \quad V_2 Cj\omega + V_2 G + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}(V_2 - kV_1) = 0$$

$$\begin{cases} I_1 = V_1\left(G + Cj\omega + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right) - \frac{k}{j\omega L(1-k^2)}V_2 \\ V_2\left(Cj\omega + G + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)}\right) = \frac{k}{j\omega L(1-k^2)}V_1 \end{cases}$$

دو معادله دو مجهول

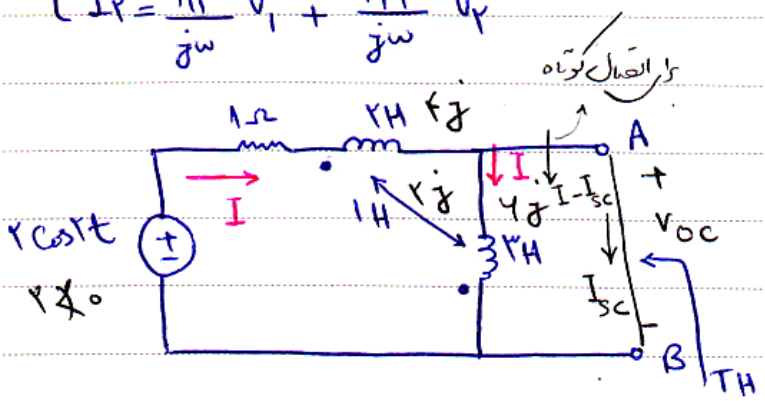
نکته) در حوزه فازور برای دو سلف تزویج شده:

$$\begin{cases} V_1 = L_{11} j\omega I_1 + L_{12} j\omega I_2 \\ V_2 = L_{12} j\omega I_1 + L_{22} j\omega I_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\Gamma_{11}}{j\omega}V_1 + \frac{\Gamma_{12}}{j\omega}V_2 \\ I_2 = \frac{\Gamma_{12}}{j\omega}V_1 + \frac{\Gamma_{22}}{j\omega}V_2 \end{cases}$$

مثال) مدار معادل تونن را بیابید؟

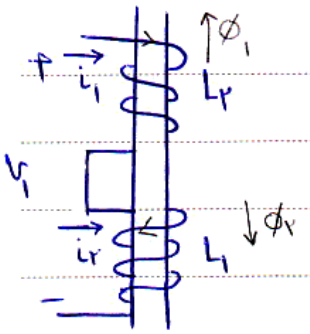


$\omega = 2$

استفاده از معادله دیفرانسیل کامل برای جواب را می دهد.

WWW.MOHANDESYAR.COM

مثال) دو سلف تزویج شده سری

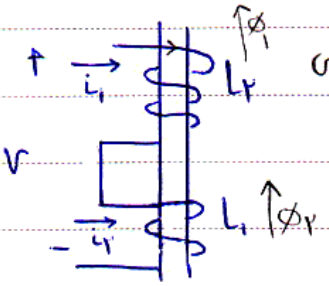


$$i_1 = i_2 = i$$

با توجه به جهت سیم پیچ ها:

$$V = V_1 + V_2$$

$$\begin{cases} V_1 = L_1 \dfrac{di}{dt} - M \dfrac{di}{dt} \\ V_2 = -M \dfrac{di}{dt} + L_2 \dfrac{di}{dt} \end{cases} \longrightarrow \underset{\text{تزویج منفی}}{V} = \underbrace{(L_1 + L_2 - 2M)}_{L_{eq}} \frac{di}{dt}$$



همه روابط قبل مثبت

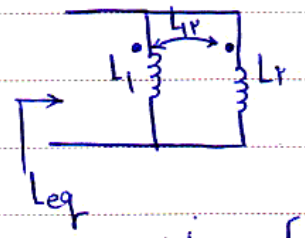
$$V = \underbrace{(L_1 + L_2 + 2M)}_{L_{eq}} \frac{di}{dt}$$

تزویج مثبت

به راحتی می توان مسائل دادنه در شکل زیر:

در دو سلف سری تزویج شده: $L_{eq} = L_1 + L_2 \pm 2M$

سلف معادل دو سلف تزویج شده موازی:



$$\lambda = Li$$

در دو سلف تزویج شده داریم:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

می توانیم جریان ها را برحسب شارها بیان کنیم.

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}}_{\Gamma} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب القا معکوس $\Gamma = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11} \lambda_1 + \Gamma_{12} \lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_{12} \lambda_1 + \Gamma_{22} \lambda_2 \end{cases}$$

در سلف های موازی، شارهای پیوندی با هم برابرند.

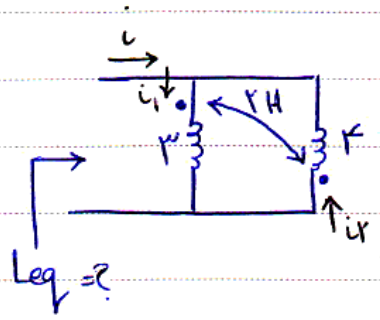
$$\lambda_1 = \lambda_2 \overset{\Delta}{=} \lambda$$

صفحه بعد

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$i_1 = (\Gamma_{11} + \Gamma_{12})\lambda$$
$$i_2 = (\Gamma_{12} + \Gamma_{22})\lambda$$

$$i = i_1 + i_2 = (\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12})\lambda \qquad i = \underbrace{(\Gamma_{11} + \Gamma_{22} + 2\Gamma_{12})}_{\Gamma_{eq} = \frac{1}{L_{eq}}}\lambda$$



تمرین)

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = \frac{1}{3\times4 - 2\times2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/4 & 3/8 \end{bmatrix}$$

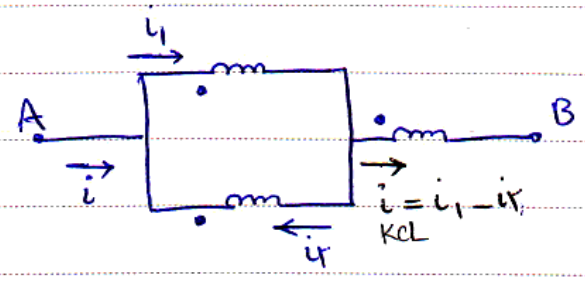
$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda \\ \lambda_2 = -\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}\lambda_1 + \Gamma_{12}\lambda_2 \\ i_2 = \Gamma_{12}\lambda_1 + \Gamma_{22}\lambda_2 \end{cases}$$

چون جهت جریان عکس

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{2}\lambda + \left(\frac{-1}{4}\right)\times(-\lambda) = \frac{3}{4}\lambda \\ i_2 = \left(\frac{-1}{4}\times\lambda\right) + \frac{3}{8}(-\lambda) = -\frac{5}{8}\lambda \end{cases}$$

KCL $\quad i = i_1 - i_2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8}\right)\lambda = \frac{11}{8}\lambda \qquad i = \frac{11}{8}\lambda \longrightarrow \Gamma_{eq} = \frac{1}{L_{eq}} = \frac{11}{8} \longrightarrow L_{eq} = \frac{8}{11}$

مثال) سلف معادل از دیدگاه AB را بدست آورید؟



$$L = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3i_1 - i_2 + 2i_3$$

$i_3 = i$

1 و 3 موافق هردو

با 2 مخالف

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date. تیپ‌ع سنگی

در حوزه‌ی فازور حل می‌کنیم :

$$KVL: \quad 2 = I + 4jI - 2jI + 6jI - 2jI$$

$$V_{oc} = 4jI$$

$$2 = (1+6j)I$$

$$I = \frac{2}{1+6j} \qquad V_{oc} = \frac{8j}{1+6j} = 1.29 + 0.21j = 1.307 \angle 9.24^\circ$$

اتصال کوتاه :

$$KVL: \quad 2 = I + 4jI - 2j(I - I_{sc})$$

$$2 = I(1+2j) + 2jI_{sc}$$

$$KVL: \quad 6j(I - I_{sc}) - 2jI = 0 \longrightarrow 4jI = 6jI_{sc} \longrightarrow I = \frac{3}{2} I_{sc}$$

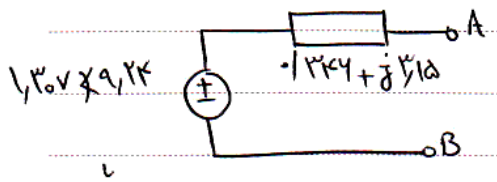
جایگذاری :

$$2 = \left(\frac{3+6j}{2} + 2j\right) I_{sc} = \frac{3+10j}{2} I_{sc}$$

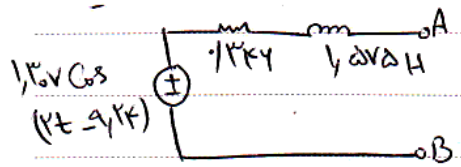
$$I_{sc} = \frac{4}{3+10j} = 0.11 - 0.397j = 0.412 \angle -74.5$$

$$Z_{th} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}} = \frac{1.307 \angle 9.24}{0.412 \angle -74.5} = 3.172 \angle 83.74 = 0.346 + j3.15$$

مدار معادل تونن :



$$2 \downarrow \quad L j\omega = 3.15j$$



مدار معادل T :

$$\begin{cases} L_a = L_1 - M \\ L_b = L_2 - M \\ L_c = M \end{cases}$$

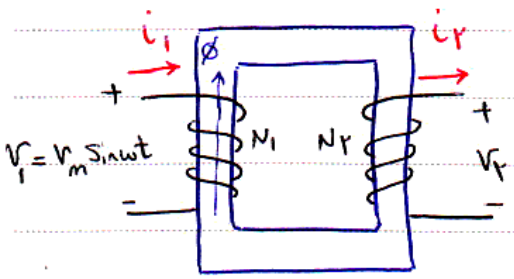
PAPCO

ضریب کوپلاژ $K = \dfrac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$

$(K \leq 1)$

WWW.MOHANDESYAR.COM

ترانس ایده‌آل :



از یک هسته و دو سیم پیچ تشکیل شده. با اعمال ولتاژ به سوئیچ اول،

شاری در هسته جاری می‌شود که از رابطه زیر پیروی خواهد کرد :

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v_1}{N_1} = \frac{v_m}{N_1}\sin\omega t \longrightarrow \phi = \frac{v_m}{N_1\omega}\cos\omega t$$

این شار از سیم پیچ دوم عبور می‌کند و در آن ولتاژ زیر القا می‌شود :

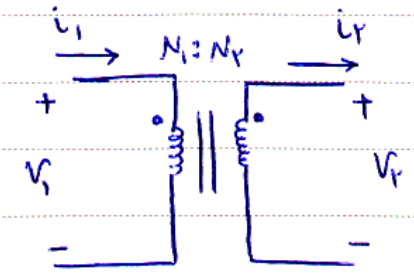
$$v_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{N_2}{N_1}\underbrace{v_m \sin\omega t}_{v_1}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1}}$$

در ترانس ایده‌آل، تلفات سیستم صفر فرض می‌شود، بنابراین قدرت لحظه‌ای دو سیم پیچ برابر است $P = vi$

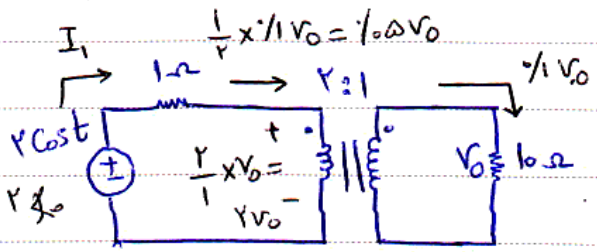
$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \longrightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{i_2}{i_1} \longrightarrow \boxed{\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2}} \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{i_2}{i_1}$$

سمبل ترانسفورمر :



مثال) قدرت کشیده شده از منبع را به دست آورید؟ و ولتاژ خروجی را؟ (v_o)

از فازور استفاده نمی‌کنیم چون سلف و خازن نداریم.



در ترانس‌فورماتورها همیشه هر آن از سر نقطه‌دار، یکی وارد و از دیگری خارج می‌شود.

PAPCO

WWW.MOHANDESYAR.COM

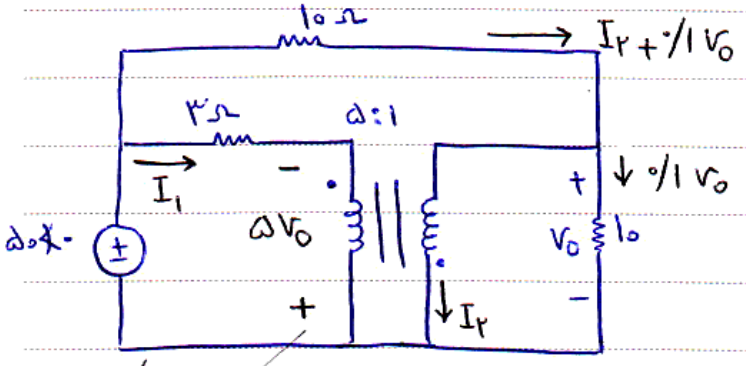
KVL: $2\cos t = 1 \times 0.05 V_o + 2V_o$

$2\cos t = 2.05 V_o \longrightarrow V_o = 0.975 \cos t$

$I_1 = 0.05 V_o = 0.487 \cos t = 0.487 \angle 0$ $\qquad V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}} \qquad I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}}$

قدرت منبع $P = V_{rms} \times I_{rms} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{0.487}{\sqrt{2}} = 0.487 \ W$

مثال) V_o را به دست آورید؟



بوبینه‌ها عکس چون ترمینال نقطه‌دار عکس هم هستند.

$I_1 = \frac{1}{5} I_2 \longrightarrow I_2 = 5 I_1$

KVL: $50 = 3I_1 - 5V_o$

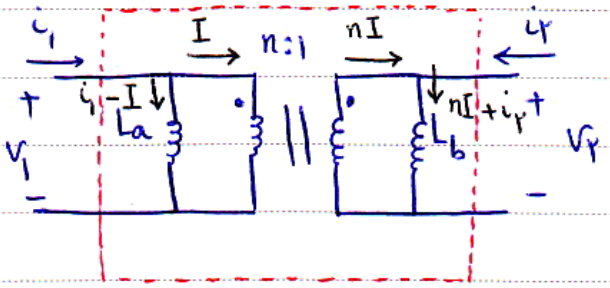
$I_1 = \frac{50 + 5V_o}{3} \longrightarrow I_2 = \frac{250 + 25V_o}{3}$

KVL: $50 = 10(I_2 + 0.1 V_o) + V_o \longrightarrow 50 = 10 I_2 + 2V_o$

$50 = \frac{2500 + 250 V_o}{3} + 2V_o \longrightarrow 150 = 2500 + 256 V_o \longrightarrow V_o = -9.18$

تمرین) یکی از سرهای نقطه‌دار را عوض کرده و مجدداً V_o را به دست آورید؟

مثال) این مدار چگونه با دو سلف تزویج شده، با ماتریس القایی $L = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}$ معادل می‌شود؟



$V_1 = L_a \frac{d(i_1 - I)}{dt} = L_a \frac{di_1}{dt} - L_a \frac{dI}{dt}$ ①

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$v_2 = L_b \frac{d(nI + i_2)}{dt} = nL_b \frac{dI}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt} \quad (2)$$

$$v_1 = nv_2 \longrightarrow L_a \frac{di_1}{dt} - L_a \frac{dI}{dt} = n^2 L_b \frac{dI}{dt} + nL_b \frac{di_2}{dt}$$

$$(n^2 L_b + L_a) \frac{dI}{dt} = L_a \frac{di_1}{dt} - nL_b \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{L_a}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} - \frac{nL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt} \quad (3)$$

(3) در (1) :

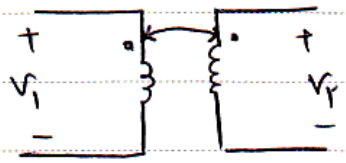
$$v_1 = L_a \frac{di_1}{dt} - \frac{L_a^2}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} + \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{v_1 = \frac{n^2 L_a L_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} + \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt}}$$

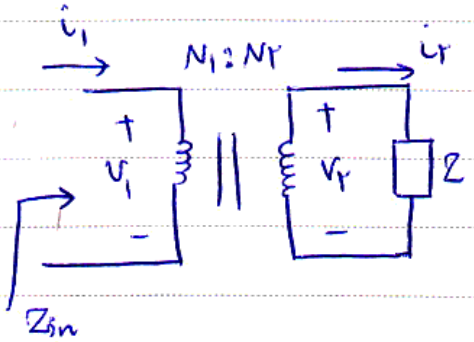
(3) در (2) :

$$v_2 = \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} - \frac{n^2 L_b^2}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt} + L_b \frac{di_2}{dt}$$

$$\boxed{v_2 = \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_1}{dt} + \frac{L_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \frac{di_2}{dt}}$$



$$L = \begin{bmatrix} \frac{n^2 L_b L_a}{n^2 L_b + L_a} & \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \\ \frac{nL_aL_b}{n^2 L_b + L_a} & \frac{L_aL_b}{n^2 L_b + L_a} \end{bmatrix}$$



خاصیت ارجاع امپدانس در ترانس ایده آل :

$$Z = \frac{v_2}{i_2}$$

$$Z_{in} = \frac{v_1}{i_1} = ?$$

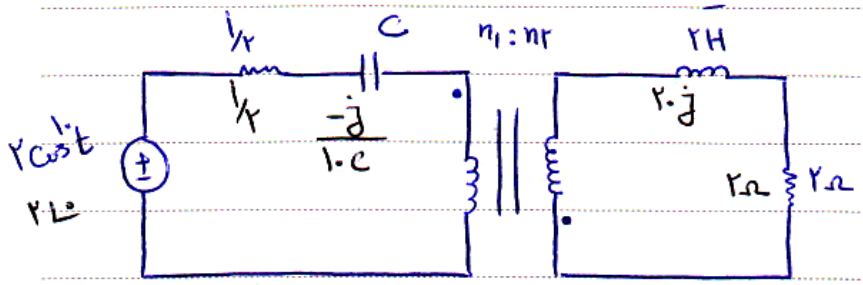
WWW.MOHANDESYAR.COM

$$Z_{in} = \frac{V_1}{i_1} = \frac{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)V_2}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)i_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z$$

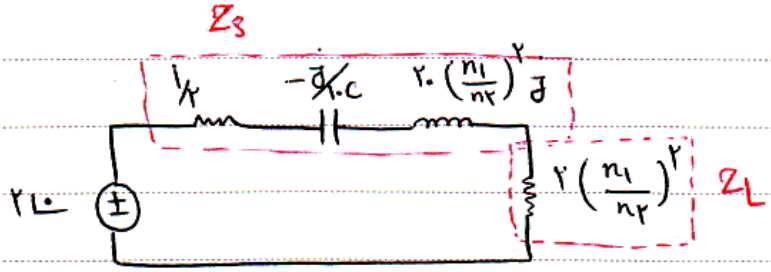
$$\rightarrow Z_{in} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z$$ → خاصیت ارجاع امپدانس (ربطی هم به سرهای نقطه دار ندارد که کجا باشند)

مثال) نسبت تبدیل ترانس و مقدار خازن را به نحوی پیدا کنید که توان تحویلی به مقاومت ۲Ω حداکثر شود؟

$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$



به سمت اولیه ارجاع می‌دهیم:



$$\frac{n_1}{n_2} \triangleq n$$

$$Z_S = \frac{1}{2} + j\left(20n^2 - \frac{1}{10C}\right) \qquad Z_L = 2n^2$$

شرط انتقال حداکثر توان: $Z_L = Z_S^*$

$$2n^2 = \frac{1}{2} - j\left(20n^2 - \frac{1}{10C}\right)$$

$$\begin{cases} 2n^2 = \frac{1}{2} \rightarrow n^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{n = \frac{1}{2}} \\ 20n^2 - \frac{1}{10C} = 0 \rightarrow 5 = \frac{1}{10C} \rightarrow \boxed{C = 0.02\,F} \end{cases}$$

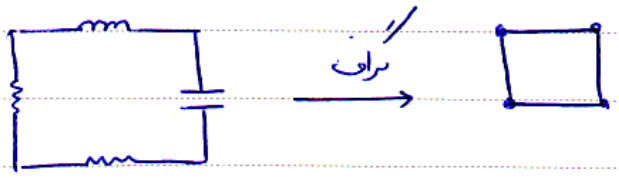
WWW.MOHANDESYAR.COM

فصل دوم: گراف‌ها و قضیه تلگان

عناصر فشرده: عناصری می‌باشند که ابعاد آن‌ها نسبت به طول موج سیگنالی که آن‌ها را تحریک می‌کند کوچک است.

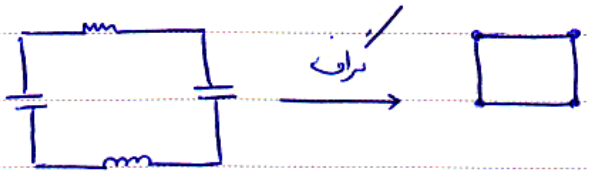
در غیر این صورت قوانین KVL و KCL دیگر برقرار نخواهد بود.

گراف:



قوانین KVL و KCL ارتباطی به ماهیت

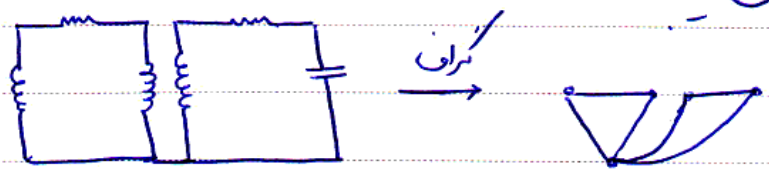
اجزای ندارد و بنابراین می‌توان به جای هر عنصر



یک شاخه در گراف قرار داد و دو سر هر شاخه را با نقطه‌هایی

یا گره می‌نامند نشان داد.

* از روی گراف نمی‌توان تشخیص داد که شبکه دارای عناصر مزدوج هست یا خیر.



زیرگراف:

مفهوم زیرگراف به گراف مانند زیرمجموعه به مجموعه است که با حذف بعضی گره‌ها یا شاخه‌ها از یک گراف به دست می‌آید.

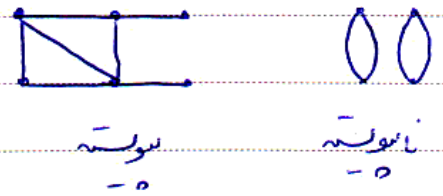
مثلاً برای گراف بالا زیرگراف

زیرگراف سره:

زیرگرافی که فقط از یک گره تشکیل شده باشد.

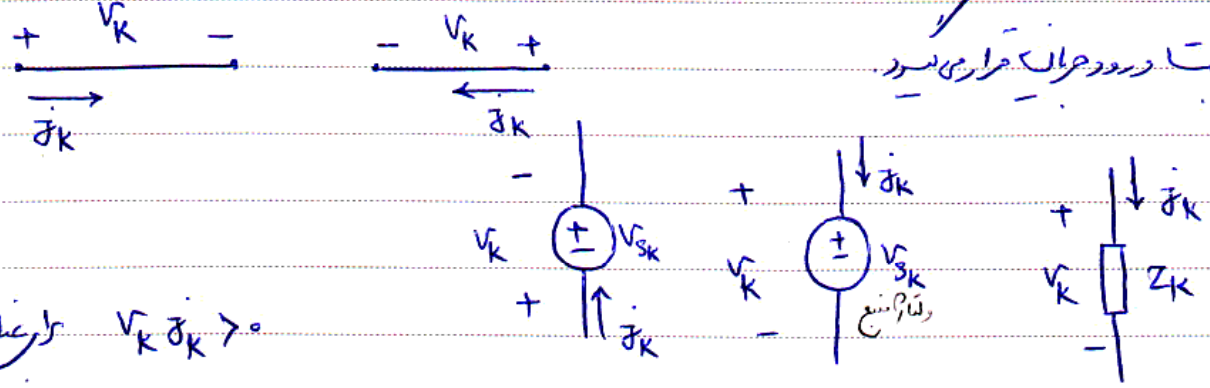
WWW.MOHANDESYAR.COM

گراف پیوسته: به گرافی پیوسته می‌گوییم که بین هر دو گره دلخواه آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.



جهت‌های قراردادی جریان:

جهت جریان در شاخه به طور دلخواه انتخاب می‌شود ولی پلاریته ولتاژ بر اساس جهت انتخاب شده است. قطب مثبت ولتاژ در جهت ورود جریان قرار می‌گیرد.

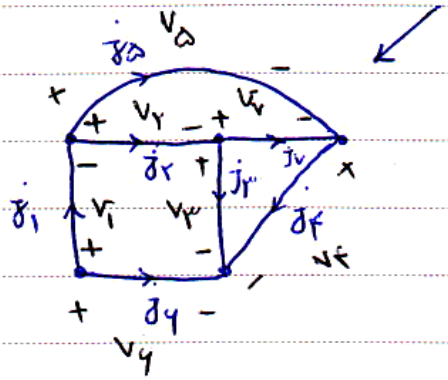


برای عناصر $V_k j_k > 0$

برای منابع $V_k j_k < 0$

گراف جهت‌دار:

گرافی که جریان شاخه‌ها روی آن تعیین شده باشد گراف جهت‌دار است.



ماتریس تلاقی گره و شاخه (A_a):

در یک گراف جهت‌دار عناصر این ماتریس به صورت زیر فرض می‌شود:

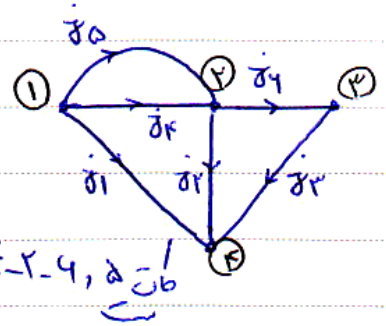
$$a_{ik} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

A_a

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } i \text{ تلاقی داشته و جریان از گره خارج شود.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } k \text{ و گره } i \text{ تلاقی نداشته باشند.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } k \text{ با گره } i \text{ تلاقی داشته و جریان به آن وارد شود.} \end{cases}$$

مثال)

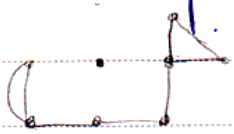


$$A_a = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

گره ⇐ شاخه

جمع جبری جریان های وارد شده به یک گره صفر است. حال این قانون را تعمیم می دهیم.

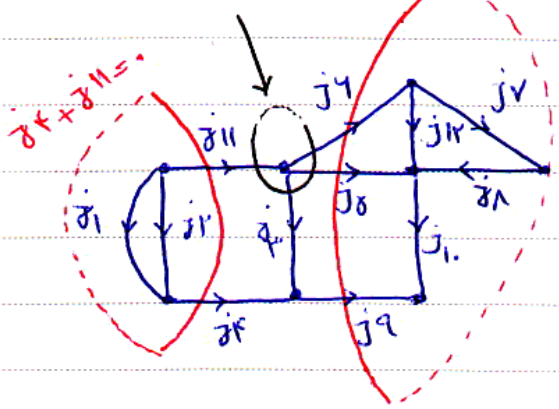
گراف کات ست: دسته ای از شاخه های یک گراف تشکیل کات ست را می دهند اگر دو شرط زیر را با هم داشته باشند:



$j6+j5+j3-j11=0$

۱) حذف تمام شاخه های این دسته یک گراف ناپیوسته باقی بگذارد.

۲) حذف تمام شاخه های غیر یکی، گراف را پیوسته کند.



کات ست هایی که می توان تشخیص داد: ۱۱ و ۴ ؛

کات ست ۵ و ۶ و ۹ کات ست ۷ و ۱۲ و ۶

گسترش قانون KCL: برای هر بسته ی بسته در هر لحظه از زمان، مجموع جبری جریان های خارج شده از کات ست صفر است.

قرارداد: اگر کات ست را با یک سطح کاوسی نشان دهیم، جریان های خارج شده از کات ست با علامت مثبت و جریان های

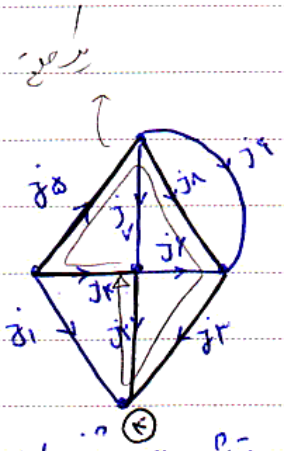
WWW.MOHANDESYAR.COM

وارد شده با علامت منفی هستند. علامت جهت قرارداد شده در شکل

حلقه و قانون KVL : یک زیرگراف از یک گراف پیوسته را حلقه می‌گویند اگر دو شرط زیر را داشته باشد:

۱) زیرگراف پیوسته باشد.

۲) به هر گره فقط ۲ شاخه متصل باشد.



$$-v_4 + v_5 + v_8 + v_3 - v_2 = 0$$

قضیه تلگان: برای هر شبکه فشرده که گراف آن دارای b شاخه و n_t گره باشد چنانچه ولتاژ و جریان شاخه‌ها با j_k و v_k مشخص شده باشند، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

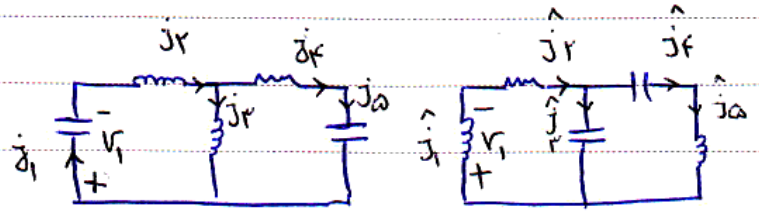
$v_k j_k > 0$ برای عناصر $\qquad$ $v_k j_k < 0$ برای منابع

تبصره: اگر دو شبکه گراف‌های یکسان داشته باشند وقتی در دو گراف شاخه‌ها را متناظر با هم قرار می‌دهیم و جهت‌های قراردادی جریان را یکسان می‌کنیم، قضیه تلگان روابط زیر را تضمین می‌کند:

1) $$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k \hat{j}_k$$

2) $$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} v_k \hat{j}_k$$

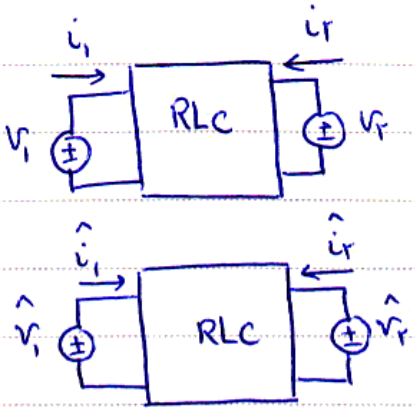
مثال)



WWW.MOHANDESYAR.COM

به آزمایش زیر در جهت اثبات قضیه تلگان دقت کنید:

یک مدار RLC ثابت در نظر بگیرید که منابع آن را به صورت زیر جابجا می‌کنیم:



می‌خواهیم اثبات کنیم:

$$\hat{V}_1 i_1 + \hat{V}_2 i_2 = V_1 \hat{i}_1 + V_2 \hat{i}_2$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{V}_k j_k = \sum_{k=1}^{b} V_k \hat{j}_k$$

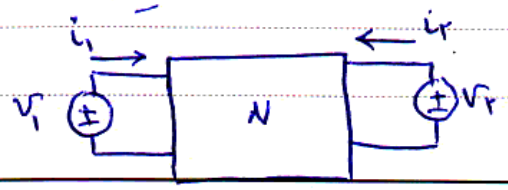
$$\hat{V}_1 i_1 + \hat{V}_2 i_2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{b} \hat{V}_k j_k}_{\text{باهم برابرند}} = V_1 \hat{i}_1 + V_2 \hat{i}_2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{b} V_k \hat{j}_k}_{\text{باهم برابرند}}$$

$$V_k = Z_k j_k \longrightarrow \sum_{k=3}^{b} V_k \hat{j}_k = \sum_{k=3}^{b} Z_k j_k \hat{j}_k$$

$$\hat{V}_k = Z_k \hat{j}_k \longrightarrow \sum_{k=3}^{b} \hat{V}_k j_k = \sum_{k=3}^{b} Z_k \hat{j}_k j_k$$

$$\Longrightarrow V_1 \hat{i}_1 + V_2 \hat{i}_2 = \hat{V}_1 i_1 + \hat{V}_2 i_2$$

مثال) شبکه N از عناصر RLC خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده. اندازه‌گیری‌های زیر در آن انجام شده است:



WWW.MOHANDESYAR.COM

$v_1 = ۴\cos(\omega t + ۶۰)$, $v_۲ = ۰$

$i_1 = \cos(\omega t + ۸۰)$, $i_۲ = ۲\cos(\omega t + ۷۰)$

$\hat{v}_1 = \cos(\omega t + ۱۰)$, $\hat{v}_۲ = ۲\cos(\omega t + ۲۰)$ $\qquad \hat{i}_1 = ?$

$v_1 = ۴\angle ۶۰ \qquad i_1 = ۱\angle ۸۰ \qquad \hat{v}_1 = ۱\angle ۱۰$

$v_۲ = ۰ \qquad i_۲ = ۲\angle ۷۰ \qquad \hat{v}_۲ = ۲\angle ۲۰$

به حوزه‌ی فازوری می‌بریم :

طبق قضیه تلگان :

$$v_1 \hat{i}_1 + v_۲ \hat{i}_۲ = \hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_۲ i_۲$$

$$۴\angle ۶۰ \times \hat{i}_1 + ۰ = ۱\angle ۱۰ \times ۱\angle ۸۰ + ۲\angle ۲۰ \times ۲\angle ۷۰$$

$$۴\angle ۶۰ \; \hat{i}_1 = ۱\angle ۹۰ + ۴\angle ۹۰$$

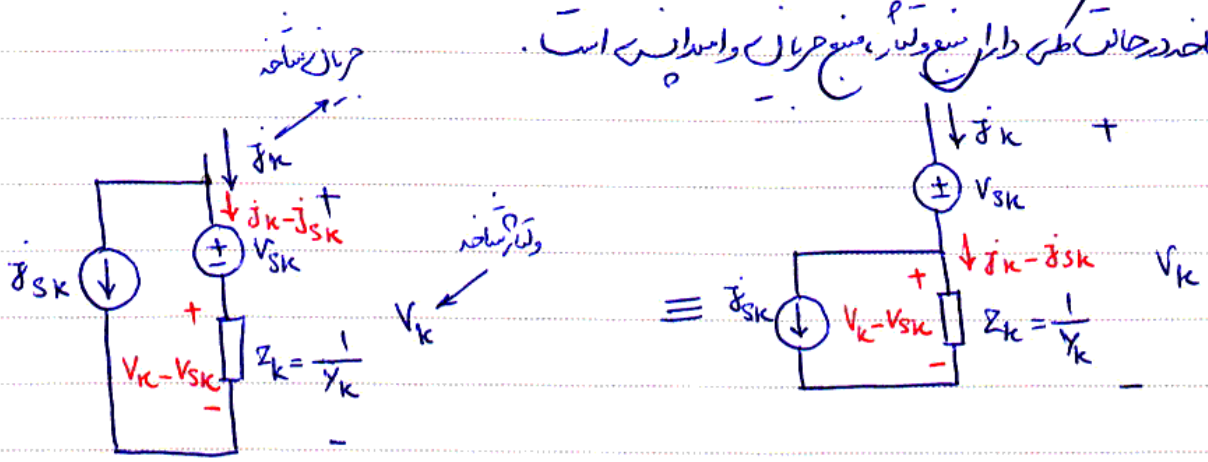
$$\hat{i}_1 = \frac{۵\angle ۹۰}{۴\angle ۶۰} = \frac{۵}{۴}\angle ۳۰ \longrightarrow \hat{i}_1 = \frac{۵}{۴}\cos(\omega t + ۳۰)$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

فصل ۱: تجزیه و تحلیل گره و مش

مدل کلی یک شاخه:

یک شاخه در حالت کلی دارای منبع ولتاژ، منبع جریان و امپدانس است.



معادلات KVL و KCL در هر دو به یک نتیجه منجر می‌شود که نشان می‌دهد با هم معادلند.

بیان رابطه شاخه با KCL:

$$j_k = j_{sk} + V_k Y_k - V_{sk} Y_k$$

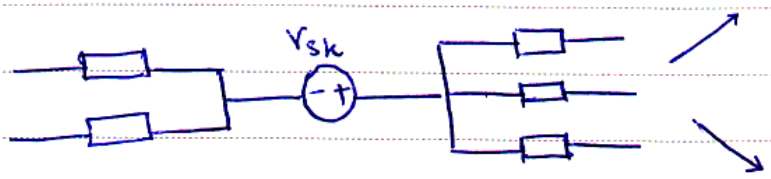
کاربرد در روش گره و کات ست.

بیان رابطه شاخه با KVL:

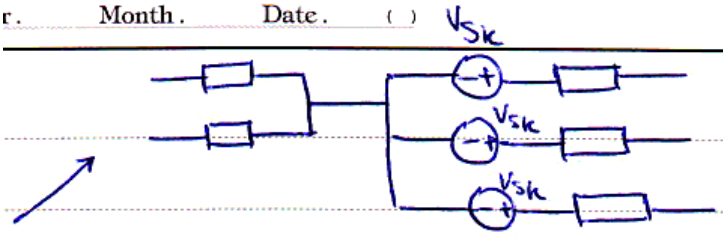
$$V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk}$$

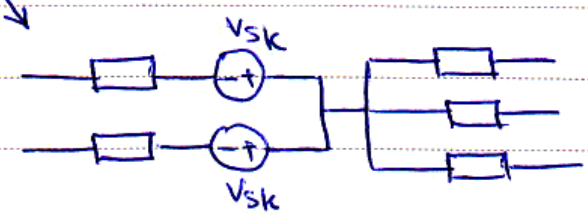
کاربرد در روش مش و حلقه اساسی.

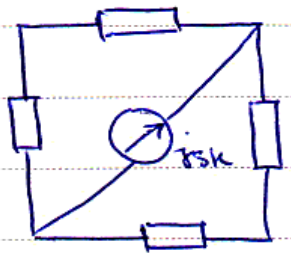
- برای اینکه حداکثر از شاخه‌هایی که تنها شامل منابع هستند از شاخه‌های دیگر لازم نباشد، تبدیل را چنان انجام می‌دهیم که تغییری در نتیجه نهایی مدار حاصل نشود.

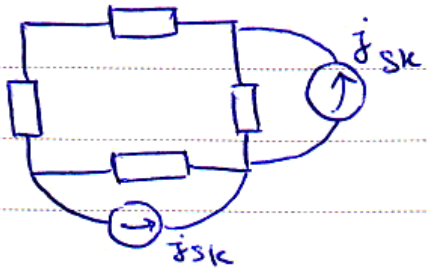


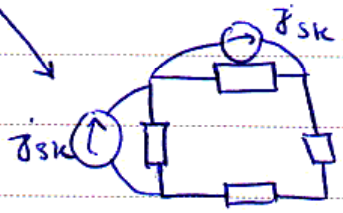
WWW.MOHANDESYAR.COM





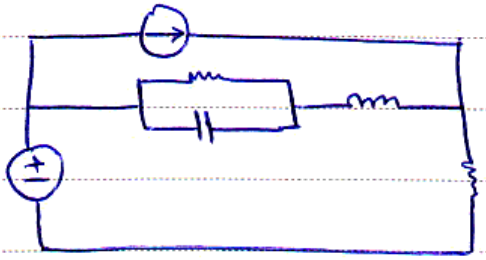


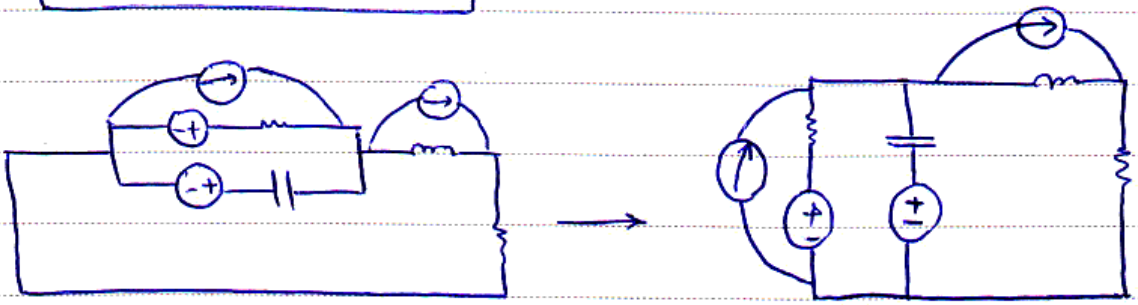




در تبدیل منابع ولتاژ اگر KVL به کار بریم و در تبدیل منابع جریان اگر KCL به کار بریم این معادلات اثبات می‌شود.

به عنوان مثال:





WWW.MOHANDESYAR.COM

روش‌های تبدیل منابع نوع هم برای منابع مستقل هم برای منابع وابسته برقرار است.

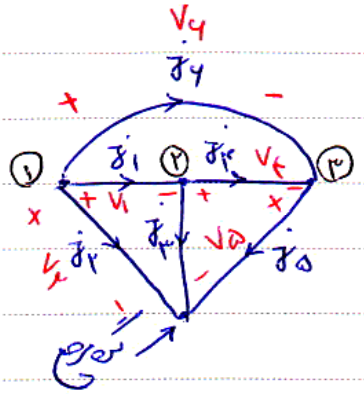
تجزیه و تحلیل گره:

فرض کنید مداری دارای b شاخه باشد، در این صورت بردارهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}$$ بردار ولتاژ شاخه‌ها

$$J = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_b \end{bmatrix}$$ بردار جریان شاخه‌ها

در روش گره معمولاً گره‌ای که بیشترین اتصال به آن وجود دارد را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم. اگر n_t تعداد کل گره‌ها باشد آنگاه $n_t = n + 1$



فرض کنید گراف جهت‌دار مداری به صورت زیر باشد ←

ماتریس تلاقی گره و شاخه در روش گره به صورت زیر است: $A = (A_a)$ بدون گره مبنا

$$A \cdot J = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \\ J_4 \\ J_5 \\ J_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 + J_6 \\ -J_1 + J_3 + J_4 \\ -J_4 + J_5 - J_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ بنا بر قانون KCL

$$\rightarrow \boxed{A \cdot J = 0}$$

بردار ولتاژ گره‌ها را با e نمایش می‌دهیم.

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

حال می‌توانیم $A^t \cdot e$ را به دست آوریم:

$$A^t \cdot e = \overset{A^t}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 - e_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_2 - e_3 \\ e_3 \\ e_1 - e_3 \end{bmatrix}$$

جای سطرها و ستون‌های ماتریس A را با هم عوض می‌کنیم.

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} \longrightarrow \boxed{A^t . e = v}$$ انشعاب KVL

اثبات قضیه تلگان:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0$$

$$\longrightarrow v_1 j_1 + v_2 j_2 + \dots + v_b j_b = 0$$

$$\sum v_k j_k = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix} = v^t . j = (A^t . e)^t . j = e^t . A . j = 0$$

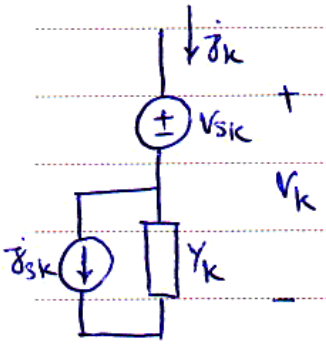
روش تجزیه و تحلیل گره:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$

همه روش امکان پذیر است: در روش گره، ولتاژ گره‌ها یعنی e مجهول معادلات است.

۱) روش منظم ۲) روش نظری ۳) روش بینابین

۱) روش منظم:



$$j_k = j_{sk} + Y_k v_k - Y_k v_{sk}$$

این رابطه را برای تمام شاخه‌های مدار می‌نویسیم:

$$j_1 = j_{s1} + Y_1 v_1 - Y_1 v_{s1}$$
$$j_2 = j_{s2} + Y_2 v_2 - Y_2 v_{s2}$$
$$\vdots$$
$$j_b$$

$$\xrightarrow{\text{صورت ماتریسی}} j = j_s + Y v - Y v_s$$

دو طرف را در A ضرب می‌کنیم:

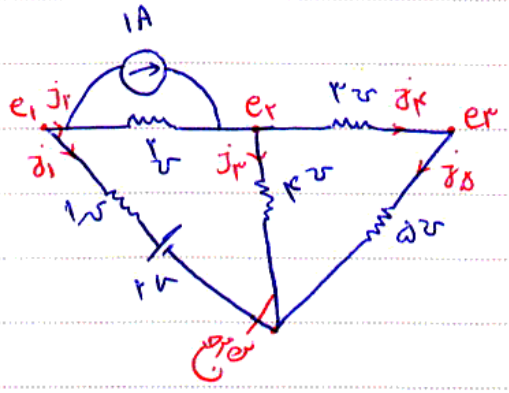
$$\underbrace{A . j}_{0} = A j_s + \underbrace{A Y v}_{A^t . e} - A Y v_s$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$0 = A j_s + A Y A^t . e - A Y v_s$$

$$\underbrace{A Y A^t}_{Y_n} . e = \underbrace{A Y v_s - A j_s}_{I_s} \quad (A) \longrightarrow Y_n . e = I_s$$

خوب است معادله A، منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کند.



مثال) یک مدار ساده مقاومتی : $V = ?$

ابتدا با استفاده از روش

$$j_k = j_{sk} + Y_k v_k - Y_k v_{sk}$$

j_k ها را می‌نویسیم و سپس به صورت ماتریسی درمی‌آوریم سپس :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$? (Y_n) = A Y A^t$$

$$? (I_s) = A Y v_s - A j_s$$

$$\Rightarrow Y_n . (e) = I_s \Rightarrow$$

$$(v) = A^t . e$$

بدست می‌آید.

$$j_1 = 0 + 1 v_1 - 1 \times 2$$
$$j_2 = 1 + 2 v_2 - 2 \times 0$$
$$j_3 = 0 + 4 v_3 - 4 \times 0$$
$$j_4 = 0 + 3 v_4 - 3 \times 0$$
$$j_5 = 0 + 5 v_5 - 5 \times 0$$

برای مثال بعدی

برای مثال بعدی

$$\underbrace{\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix}}_{j} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{j_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{1}\,1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}}_{v} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{1}\,1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_s}$$

$$Y_n = A Y A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

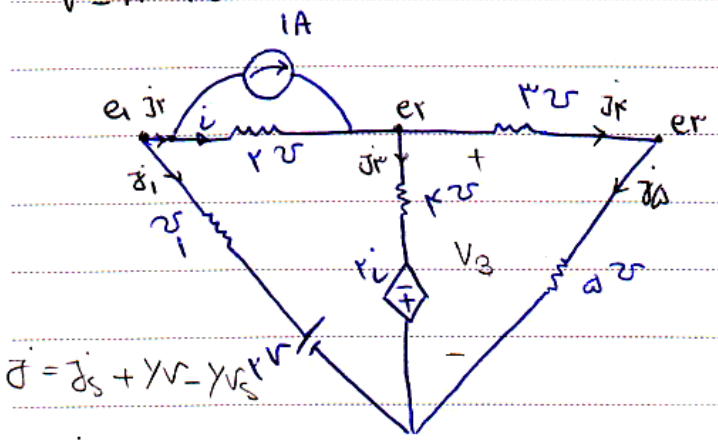
$$I_s = A Y v_s - A j_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PAPCO

WWW.MOHANDESYAR.COM

$Y_n \cdot e = I_s$ $\quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow e$ به دست می‌آید.

$V = A^t \cdot e$



مثال)

ابتدا وابستگی را به دست می‌آوریم. (i)

$i = j_2 - 1$

KCL: $j_2 = i + 1 \Rightarrow i = j_2 - 1$

$j = j_s + YV - YV_s$

$j_1 = 0 + 1V_1 - 1 \times 2$

$j_2 = 1 + 2V_2 - 2 \times 0$

$j_3 = 0 + 4(V_3 - (-2i)) = 4(V_3 + 2j_2 - 2) = 4V_3 + 8j_2 - 8 = 4V_3 + 12V_2 + 8 - 8 =$

$0 + 4V_3 + 12V_2 + 0$

$j_4 = 0 + 3V_4 - 3 \times 0$

$j_5 = 0 + 5V_5 - 5 \times 0$

$j_3 = 0 + 4V_3 - 4(-2i) =$

$4(V_3 - (-2i))$

$Y_n = AYA^t = ?$ $\longrightarrow Y_n \cdot e = I_s$

$I_s = AYV_s - Aj_s = ?$

روش نظری:

در شرایط زیر از روش نظری استفاده می‌کنیم:

۱) منابع ولتاژ وجود نداشته باشند یا اگر وجود دارند به منابع جریان تبدیل شوند.

۲) سلف‌ها تبدیل شده و منابع وابسته وجود نداشته باشند، در این صورت در معادله‌ی $Y_n \cdot e = i_s$

WWW.MOHANDESYAR.COM

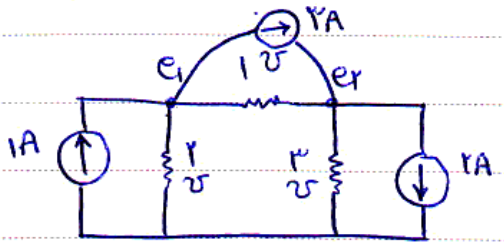
می‌توان Y_n و I_s را بصورت زیر نیز داد.

$$Y_n \cdot e = i_s$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به گره } i \text{ ام} \\ i \neq j & -(\text{مجموع ادمیتانس‌های متصل بین گره } i \text{ و } j) \end{cases}$$

i_{s_i} = (مجموع جریان‌های وارد شده به گره (وارد شده با علامت مثبت و خارج شده با علامت منفی))

مثال)



تعداد گره‌ها

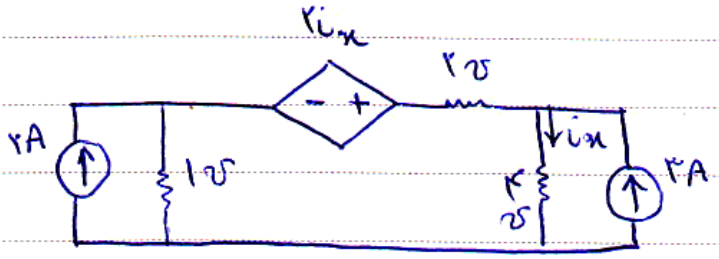
$$Y_n = \begin{bmatrix} 1+2 & -1 \\ -1 & 1+3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$i_s = \begin{bmatrix} 1-3 \\ 3-2 \end{bmatrix} \qquad Y_n \cdot e = I_s \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

روش میانبر:

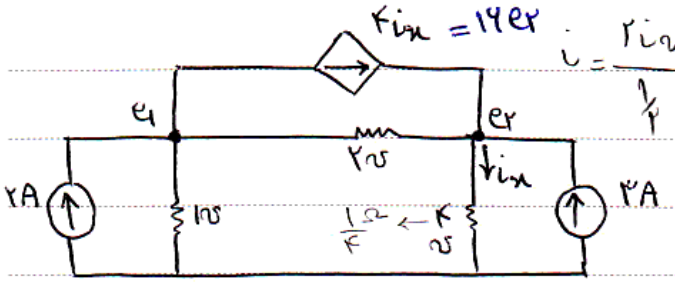
همان روش نظری است، با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند. در این روش، ابتدا منابع وابسته را مانند منابع مستقل در نظر می‌گیریم و معادلات را از روش نظری می‌نویسیم. در انتها اثر منابع وابسته را به ماتریس Y_n می‌گذاریم.

مثال)



WWW.MOHANDESYAR.COM

حل: منابع ولتاژ به جریان تبدیل می‌شوند:



$$i = \frac{2i_x}{1/2} = \frac{8e_2}{1/2} = 16e_2$$

در روش گره، ولتاژ گره‌ها یعنی e مجهول معادلات است. وقتی از روش میانبر استفاده می‌کنیم، تمام وابستگی‌ها برحسب e نوشته می‌شوند.

$$i_x = \frac{e_2}{1/4} = 4e_2$$

چون از آن سمت تاری دارد نشده، علامت منفی گذاشته شده

$$Y_n \cdot e = I_s \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 16e_2 \\ 16e_2 + 3 \end{bmatrix}$$

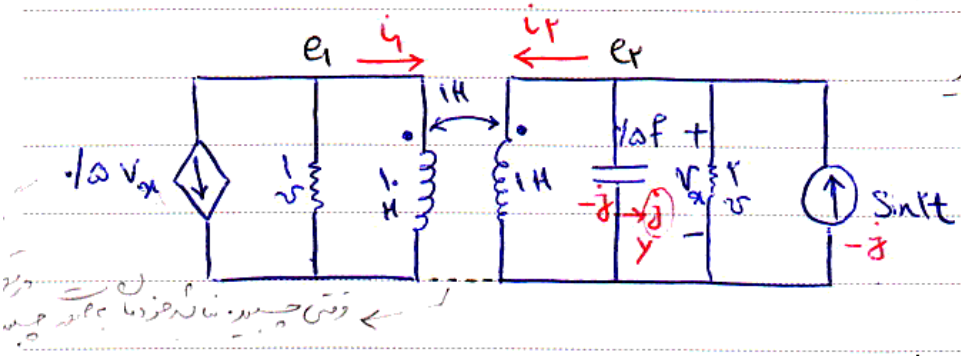
$+14$ $\quad$ -16

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه، تحلیل گره در حالت دائمی سینوسی:

وقتی منابع موجود در یک مدار در رژیم سینوسی و به صورت تک فرکانس باشند می‌توان از تحلیل حالت دائمی استفاده کرد.

مثال) چون سلف توزیع شده داریم باید از نظم استفاده کنیم.



$$= \cos(2t - 90) \Rightarrow -j$$

$$L = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \Gamma = \frac{1}{10-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix}$$

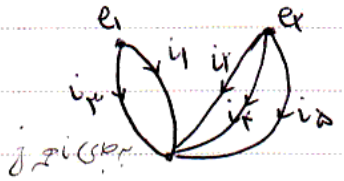
WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\lambda = Li \Rightarrow i = \frac{\lambda}{L} = \lambda \Gamma \xrightarrow[\text{ماتریس}]{} I = V \frac{1}{j\omega} \Gamma$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

در حوزه‌ی سینوسی ماندگار :

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

معادلات گره به روش منظم :

$$j_k = j_{sk} + Y_k V_k - Y_k V_{sk}$$

$$j_3 = 0.5 V_x + 1 \times V_3 \,,\; V_x = V_5 \qquad j_5 = -(-j) + 0 + 2V_5 \longrightarrow j_5 = j + 2V_5$$

$$j_4 = 0 + j \times V_4 \longrightarrow j_4 = j V_4 \qquad j_3 = 0.5 \times V_5 + V_3 \longrightarrow j_3 = 0.5 V_5 + V_3$$

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad j = j_s + YV - YV_s$$

$$\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ j \end{bmatrix}}_{j_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{9j\omega} & \frac{-1}{9j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{9j\omega} & \frac{10}{9j\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{Y_b} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Y_n = A Y_b A^t \qquad i_s = \cancel{A Y_b V_s}^{\,0} - A j_s$$

معادلات انتگرال - دیفرانسیل :

چنانچه بخواهیم پاسخ کامل یک شبکه‌ی مقاومتی را به یک ورودی و حالت اولیه‌ی معلوم محاسبه کنیم، معادلات

WWW.MOHANDESYAR.COM

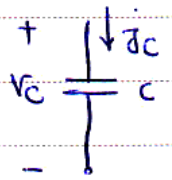
انتگرال - دیفرانسیل لازم خواهد بود.

اپراتور D :

$$\frac{d}{dt} \triangleq D$$

حال ادمیتانس های سلف خازن در حوزه ی انتگرال - دیفرانسیل را به دست می آوریم:

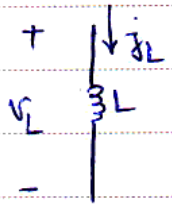
۱- خازن :



$$i_C = C\frac{d}{dt}v_C = CDv_C$$

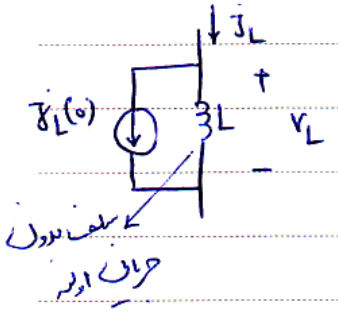
$$Y_C = \frac{i_C}{v_C} = CD$$

۲- سلف :



$$i_L = \frac{1}{L}\int v_L\,dt + i_L(0)$$

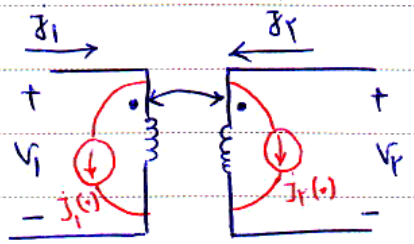
جریان اولیه ی سلف $i_L(0)$ را با یک منبع جریان موازی نشان می دهیم تا از معادلات حذف شود.



$$i = \frac{1}{L}\int v_L\,dt \Rightarrow v_L = L\frac{d}{dt}i$$

$$v_L = LDi \Rightarrow Y_L = \frac{i}{v_L} = \frac{1}{LD}$$

برای سلف های دو سر مضر می توانیم آن را تعمیم دهیم:



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه

$$\lambda = Li$$

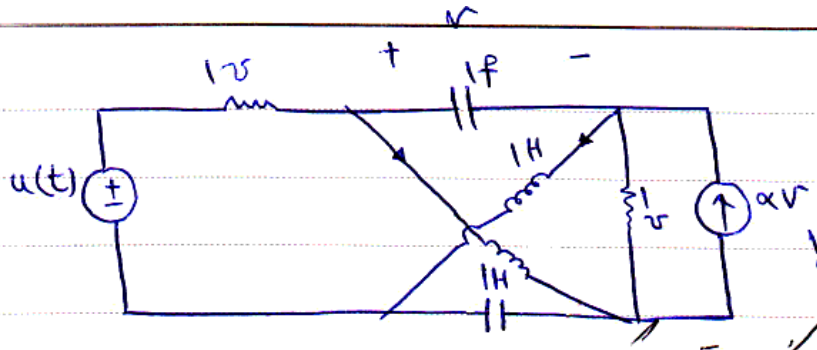
$$i = \lambda\Gamma$$

$$i = v\frac{1}{j\omega}\Gamma = v\frac{1}{D}\Gamma$$

$$i = \frac{1}{D}v\Gamma$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

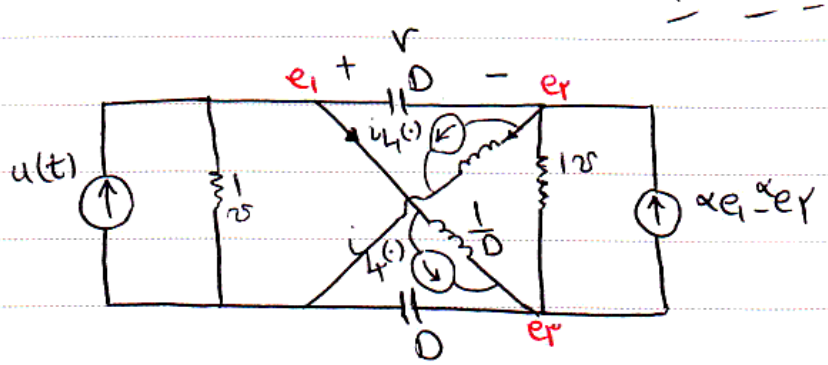
مثال) تمرین ۲۹ کتاب



$v_{C_2}(0), v_{C_1}(0)$ $i_{L_1}(0)$, $i_{L_2}(0)$

در حوزه‌ی لاپلاس و فرکانس از روش میانبر گره استفاده می‌کنیم.

به دلیل وجود $u(t)$ ناچاریم از لاپلاس و فرکانس حل کنیم.

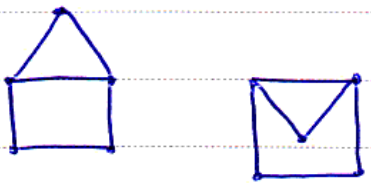


$$\begin{bmatrix} 1+D+\frac{1}{D} & -D & -\frac{1}{D} \\ -D-\alpha & 1+D+\frac{1}{D}+\alpha & -1 \\ -\frac{1}{D}+\alpha & -1-\alpha & 1+\frac{1}{D}+D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t)-i_{L_2}(0) \\ \alpha e_1 - \alpha e_2 - i_{L_1}(0) \\ -\alpha e_1 + \alpha e_2 + i_{L_2}(0) \end{bmatrix}$$

تجزیه و تحلیل شبکه:

گراف‌های توپولوژیکی: گراف‌هایی هستند که از نظر ترسیمی متفاوت‌اند ولی در واقع یک گراف هستند.

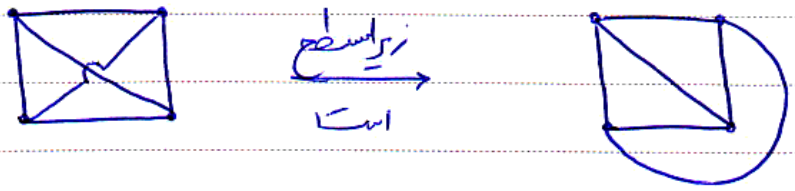
مثال)

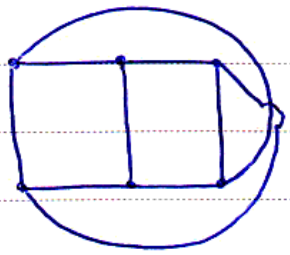


گراف‌های مسطح: به گرافی گفته می‌شود که بتوان آن را در یک صفحه رسم کرد به نحوی که هیچ دو ساحه‌ای یکدیگر را قطع نکنند.

WWW.MOHANDESYAR.COM

مثال)



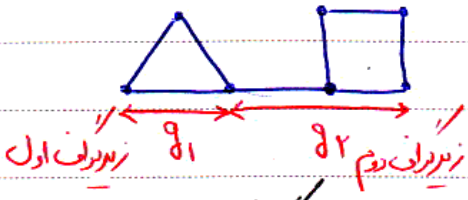


غیر سطح

مش درونی و مش بیرونی:

حلقه‌ای که در آن هیچ ساحه‌ای وجود نداشته باشد را مش درونی و از این به بعد به اختصار مش می‌گویند و حلقه‌ای که در خارج از آن هیچ ساحه‌ای وجود نداشته باشد، مش بیرونی است.

گراف‌های لولا دار و بی‌لولا: به گرافی لولا دار می‌گویند که بتوان آن را به دو زیرگراف ناسوده که تنها در یک رأس با هم متصل اند، تفکیک کرد.



گراف لولا دار

به گرافی بی‌لولا می‌گویند که هرگاه به دو زیرگراف ناسوده تفکیک شوند، حداقل در دو رأس با هم متصل باشند.

گراف بی‌لولا

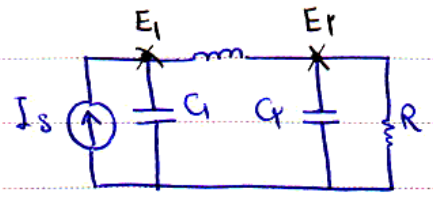
WWW.MOHANDESYAR.COM

توجه) وقتی در یک مدار، بیش‌تر منابع جریان داشته باشیم، از KCL استفاده می‌کنیم.

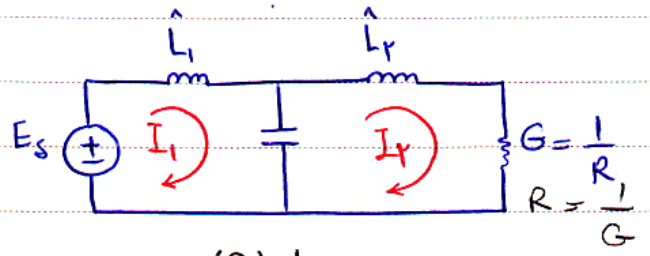
توجه) وقتی در یک مدار، بیش‌تر منابع ولتاژ داشته باشیم، از KVL استفاده می‌کنیم.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

خاصیت دوگان: این خاصیت در گراف‌های مسطح بوسته‌ای بولا صدق می‌کند. عناصر بسته نباید دو قطبی باشند. بنابراین عناصری مانند ترانسفورماتور، سلف‌های تزویج شده و غیره را از بحث خارج می‌کنیم. به دو مدار زیر توجه کنید:



مدار (A)



مدار (B)

مدار A:

KCL

$$I_s = E_1 C_1 j\omega + \frac{E_1 - E_2}{L j\omega}$$

$$\boxed{I_s = E_1\left(C_1 j\omega + \frac{1}{L j\omega}\right) - E_2 \times \frac{1}{L j\omega}} \quad (1)$$

KCL

$$\frac{E_1 - E_2}{L j\omega} = E_2 C_2 j\omega + \frac{E_2}{R}$$

$$\boxed{E_1 \times \frac{1}{L j\omega} - E_2\left(\frac{1}{L j\omega} + C_2 j\omega + \frac{1}{R}\right) = 0} \quad (2)$$

مدار B:

KVL

$$E_s = \hat{L}_1 j\omega I_1 + \frac{1}{\hat{C} j\omega}(I_1 - I_2)$$

$$\rightarrow \boxed{E_s = I_1\left(L_1 j\omega + \frac{1}{\hat{C} j\omega}\right) - I_2 \times \frac{1}{\hat{C} j\omega}} \quad (3)$$

KVL

$$\frac{1}{\hat{C} j\omega}(I_2 - I_1) + \hat{L}_2 j\omega I_2 + R I_2 = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{\hat{C} j\omega} I_1 - I_2\left(\frac{1}{\hat{C} j\omega} + \hat{L}_2 j\omega + R\right) = 0} \quad (4)$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

با قیاس روابط ① با ③ و همچنین ② با ④ مشاهده می‌کنیم که یک تناظر یک به یک بین روابط وجود دارد.

$E \longleftrightarrow I$ E جایش را به I داده و برعکس.

$C \longleftrightarrow L$ C جایش را به L داده و برعکس.

$R \longleftrightarrow G = \frac{1}{R}$ R جایش را به G داده و برعکس.

* این دو مدار (A و B) دوگان هم هستند به عبارتی اگر مدار A را حل کنیم، نتایج آن برای مدار B قابل استفاده است.

گراف‌های دوگان:

دو گراف g و $\hat{g}$ را دوگان می‌گویند، اگر سه شرط زیر را داشته باشند:

به ازای هر تعداد مش چقدر تعداد گره

۱- میان مش‌های $\hat{g}$ با در نظر گرفتن مش بیرونی و گره‌های g یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۲- میان مش‌های g با در نظر گرفتن مش بیرونی و گره‌های $\hat{g}$ یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد.

۳- میان شاخه‌های دو گراف یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد به نحوی که هرگاه دو مش یک گراف دارای شاخه‌ی مشترکی باشند، گره‌های متناظر با این دو مش در مدار دوگان شاخه‌ای داشته باشد که این دو گره را به هم وصل می‌کند.

الگوریتم تشکیل مدار دوگان:

۱- برای هر یک از مش‌های g یا انتصاب (در نظر گرفتن) مش بیرونی، یک گره از $\hat{g}$ را متناظر می‌کنیم.

۲- برای هر شاخه‌ی K از g که بین مش‌های j و i مشترک است، یک شاخه از $\hat{g}$ متناظر می‌کنیم که گره‌های i و j

WWW.MOHANDESYAR.COM

$\hat{g}$ را متصل کند.

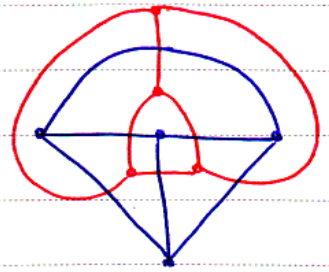
۳- بین عناصر g و $\hat{g}$ تناظر زیر را به وجود می‌آوریم؟

$L \longleftrightarrow C$

$R \longleftrightarrow G$

$I \longleftrightarrow E$ مثل منابع ولتاژ / مثل منابع جریان

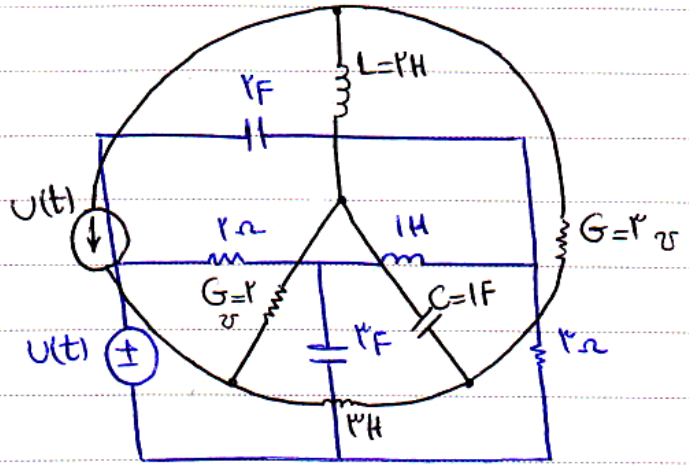
مثال) گراف‌های دوگان گراف زیر را به دست آورید؟



متناظر با هر مش بودن در درونی یک گره می‌گذاریم.

مثال) گراف دوگان مدار زیر را به دست آورید.

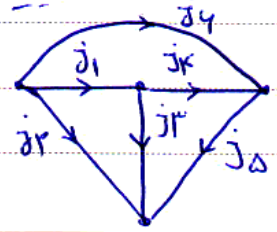
جریان به سر مثبت منبع وارد می‌شود.



تجزیه و تحلیل مش؟

در یک مدار که دارای b شاخه و n_t گره باشد، تعداد مش‌ها عبارت است از: $L = b - n_t + 1$

در روش مش برای هر یک از مش‌ها جهت عقربه‌های ساعت را به عنوان جهت قراردادی در نظر می‌گیریم.



$L = 6 - 4 + 1 = 3$

شاخه — گره

WWW.MOHANDESYAR.COM

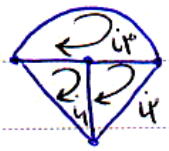
$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$ بردار ولتاژ شاخه‌ها

$$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix}$$ بردار جریان مش‌ها

ماتریس M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه K در مش i قرار داشته و هم‌جهت با مش باشد} \\ 0 & \text{اگر شاخه‌ی K در مش i قرار نباشد} \\ -1 & \text{اگر شاخه‌ی K در مش i قرار داشته و مخالف با مش باشد} \end{cases}$$

ماتریس M برای گراف زیر



$$\underset{3\times 6}{M_{ik}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 6}$$

استنباط‌های KVL و KCL:

$$M.V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 - V_2 + V_3 \\ -V_3 + V_4 + V_5 \\ -V_1 - V_4 + V_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

استنباط KVL: $\boxed{M.V = 0}$

$$M^t . i = ?$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 - i_3 \\ -i_1 \\ i_1 - i_2 \\ i_2 - i_3 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \end{bmatrix}$$

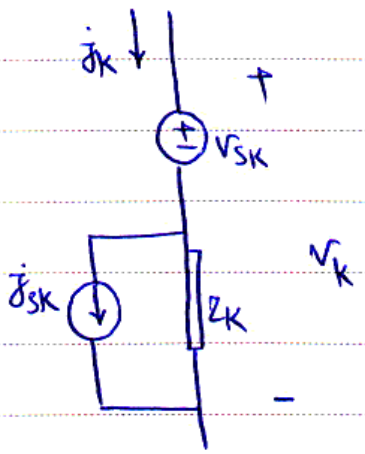
استنباط KCL: $\boxed{M^t . i = j}$

WWW.MOHANDESYAR.COM

روش آنالیز مش :

سه روش وجود دارد — منظم — نظری — بیانیه

روش منظم :



$$V_K = V_{SK} + Z_K j_K - Z_K j_{SK}$$

وقتی رابطه‌ی فوق برای تمام شاخه‌ها به صورت ماتریسی نوشته شود :

$$V = V_s + Z_b j - Z_b j_s$$

دو طرف را در M ضرب می‌کنیم :

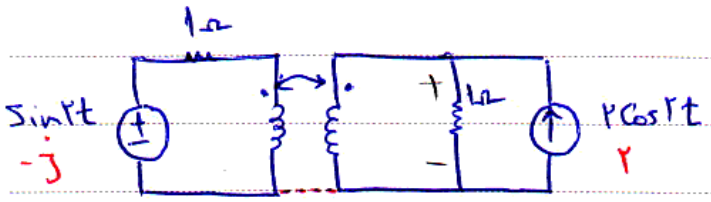
$$\underbrace{M.V}_{0} = MV_s + MZ_b \underbrace{j}_{M^t.i} - MZ_b j_s$$

$$\boxed{\overbrace{MZ_b M^t}^{Z_m} .i = \underbrace{MZ_b j_s - MV_s}_{e_s}} \quad (1) \Longrightarrow Z_m . i = e_s$$

طرف راست معادله‌ی (1) تمامی منابع جریان مستقل را منبع ولتاژ تبدیل می‌کند.

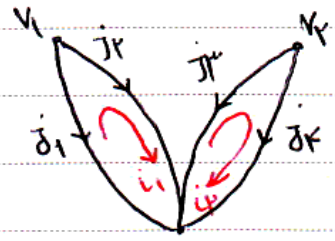
WWW.MOHANDESYAR.COM

مثال)



$$L=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

گراف :



$$M=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ منابع را در نظر نمی‌گیریم.

$$V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk}$$

ابتدا برای سلف‌های تزویج شده می‌نویسیم :

$$\begin{bmatrix}V_2\\ V_3\end{bmatrix} = j\omega\begin{bmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{12} & L_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j_2\\ j_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}V_2\\ V_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2j & 2j\\ 2j & 4j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}j_2\\ j_3\end{bmatrix}$$

$$\boxed{V_1 = -j + 1\times j_1 - 1\times 0}$$
$$\boxed{V_4 = 0 + 1\times j_4 - 1\times(-2)}$$

$$\begin{bmatrix}V_1\\ V_2\\ V_3\\ V_4\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}-j\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2j & 2j & 0\\ 0 & 2j & 4j & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{Z_b}\begin{bmatrix}j_1\\ j_2\\ j_3\\ j_4\end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2j & 2j & 0\\ 0 & 2j & 4j & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{Z_b}\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -2\end{bmatrix}}_{j_s}$$

$$Z_m \cdot i = e_s$$

$$Z_m = M Z_b M^t = \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2j & 2j & 0\\ 0 & 2j & 4j & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}-1 & 2j & 2j & 0\\ 0 & -2j & -4j & 1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+2j & -2j\\ -2j & 1+4j\end{bmatrix}$$

$$e_s = M Z_b j_s - M V_s$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$e_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2j & 2j & 0 \\ 0 & 2j & 4j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$e_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j \\ -2 \end{bmatrix}$$

روش نظری :

اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد در معادله‌ی $Z_m . i = e_s$ ماتریس‌های Z_m و e_s را می‌توان مستقیماً تشکیل داد.

۱) منابع جریان وجود نداشته باشند یا اگر دارند به منبع ولتاژ تبدیل شوند. (ضمناً همه‌ی منابع مستقل باشند)

۲) سلف‌های تزویج شده در مدار موجود نباشد.

تعداد مش‌ها L

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1L} \\ \vdots & & \\ Z_{L1} & \cdots & Z_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s_1} \\ \vdots \\ e_{s_L} \end{bmatrix}$$

$$Z_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع امپدانس‌های موجود در مش } i \text{ ام} \\ i \neq j & -(\text{مجموع امپدانس‌های مشترک بین مش } i \text{ و } j) \end{cases}$$

$e_{s_i} =$ مجموع جبری منابع ولتاژ موجود در مش i ام از قطب مثبت منبع وارد شدیم با علامت منفی و اگر از قطب منفی وارد شدیم با علامت مثبت.

روش میانبر :

همان روش نظری است با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند. منابع وابسته را مثل منابع

WWW.MOHANDESYAR.COM

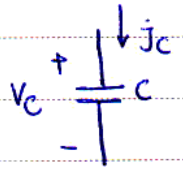
مستقل فرض می‌کنیم و وابستگی‌ها را برحسب جریان مش‌ها تعیین می‌کنیم و معادلات را به روش کلوی می‌نویسیم. در انتها ماتریس

وابستگی‌ها را به ماتریس Z_m می‌بریم.

معادلات انتگرال - دیفرانسیل:

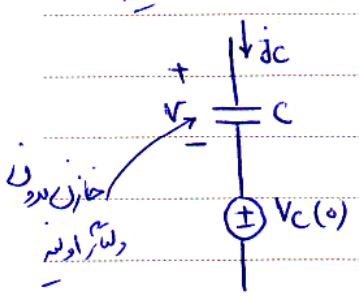
امپدانس‌های سلف و خازن را در این حوزه بدست می‌آوریم.

۱- خازن:



$$V_c = \frac{1}{C}\int j_c\, dt + V_c(0)$$

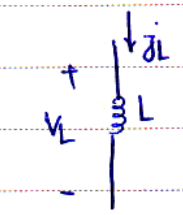
برای جدا کردن شرط اولیه از معادله آن را بصورت یک منبع ولتاژ سری با یک خازن بدون شرط اولیه نشان می‌دهیم.



$$V = \frac{1}{C}\int j_c\, dt \Rightarrow C\frac{dV}{dt} = j_c$$

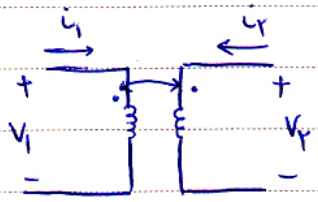
$$CDV = j_c \longrightarrow Z_c = \frac{V}{j_c} \Rightarrow Z_c = \frac{1}{CD}$$

۲- سلف:



$$V_L = L\frac{dj_L}{dt} \longrightarrow V_L = LD\, j_L$$

$$Z_L = \frac{V_L}{j_L} \longrightarrow Z_L = LD$$



با تعمیم برای سلف‌های تزویج شده خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = D\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

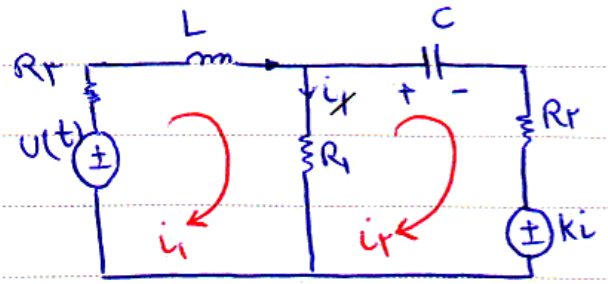
PAPCO

$$\lambda = Li \Rightarrow V = Lj\omega i = LDi$$

$$V = LDi$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

مثال)



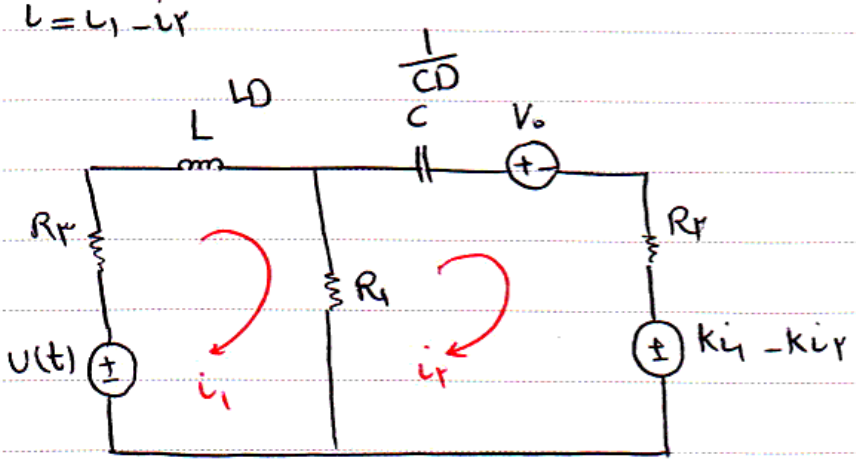
$V_C(0)=V_0$

$i_L(0)=I_0$

حل از روش میانبر: چون مدار در رژیم سینوسی نیست،

دارای سلف و خازن است و شرایط اولیه داده شده باید در حوزه‌ی انتگرال دیفرانسیل حل کنیم.

$i=i_1-i_2$



$Z_m \cdot i = e_s$

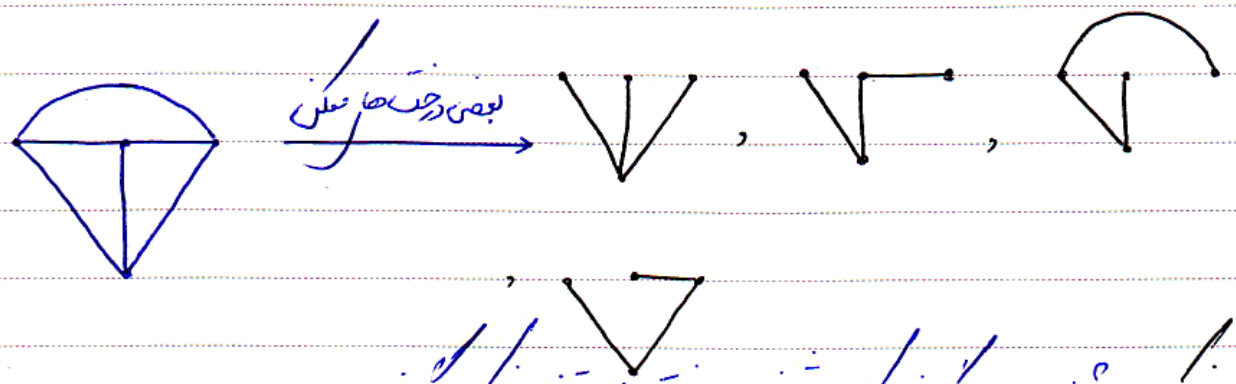
$$\begin{bmatrix} R_3+LD+R_1 & -R_1 \\ -R_1+K & R_1+\frac{1}{CD}+R_2 \end{bmatrix}_{-K} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(t) \\ -V_0-\cancel{Ki_1}+\cancel{Ki_2} \end{bmatrix}_2$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

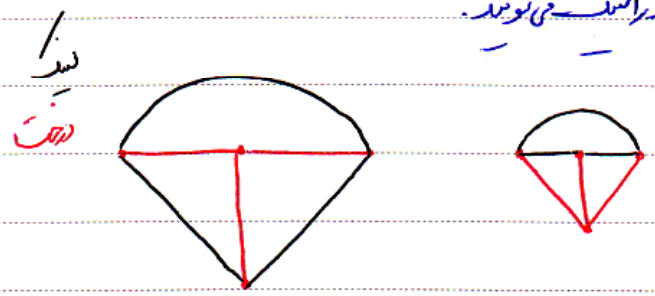
فصل ۱۱ : تجزیه تحلیل حلقه‌ی اساسی و کات ست اساسی :

درخت : یک زیرگراف از یک گراف پیوسته را درخت گویند اگر ۳ شرط زیر را دارا باشد :

۱) پیوسته باشد. ۲) تمام گره‌ها را شامل شود. ۳) هیچ حلقه‌ای تشکیل ندهد.



لینک : شاخه‌هایی از گراف که از شاخه‌های درخت نیستند را لینک می‌گویند.



قضیه اساسی تئوری گراف :

اگر گراف پیوسته‌ی G و درخت اختیاری T از آن گراف را در نظر بگیریم :

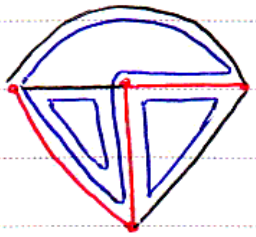
۱) بین هر دو گره‌ی دلخواه از گراف G روی درخت T یک مسیر منحصر به فرد وجود دارد.

۲) تعداد شاخه‌های درخت برابر $n_t - 1$ $^{4-1=3}$ و تعداد لینک‌ها برابر $b - n_t + 1$ $^{6-4+1=3}$ است.

۳) هر لینک درخت T همراه با مسیر منحصر به فرد میان دو گره آن لینک تشکیل یک حلقه می‌دهد که آن حلقه‌ی اساسی

WWW.MOHANDESYAR.COM

متناظر با آن لینک می‌گویند.

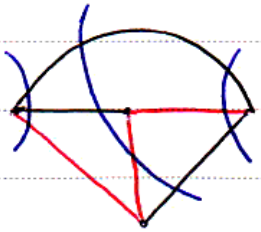


یعنی به تعداد لینک‌ها حلقه‌ی اساسی داریم.

۴) هر شاخه‌ی درخت T و تعدادی از لینک‌ها تشکیل یک کات‌ست منحصر به فرد را می‌دهد که به آن کات‌ست اساسی متناظر با آن شاخه‌ی درخت می‌گویند. یعنی به تعداد شاخه‌های درخت، کات‌ست اساسی داریم.

روش به دست آوردن کات‌ست اساسی متناظر با شاخه‌ی درخت:

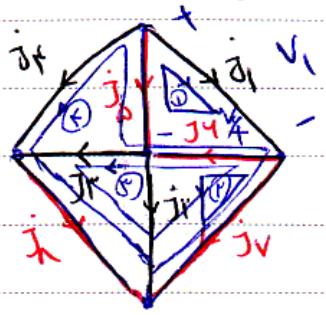
شاخه‌ی درخت مورد نظر را حذف می‌کنیم، درخت به ۲ قسمت مجزا تقسیم می‌شود. لینک‌هایی که این دو قسمت مجزا را به هم وصل می‌کنند به همراه آن شاخه‌ی درخت، تشکیل کات‌ست اساسی متناظر با آن شاخه‌ی درخت را می‌دهند.



تجزیه و تحلیل حلقه‌ی اساسی:

قرارداد ۱) لینک‌ها را از ۱ تا n و درخت‌ها را از n+1 تا b شماره‌گذاری می‌کنیم.

قرارداد ۲) جهت حلقه‌ی اساسی متناظر با هر لینک را هم جهت با جریان لینک در نظر می‌گیریم.



فرض کنید یک گراف به همراه درخت انتخابی مانند شکل زیر باشد:

جهت‌ها اختیاری است.

WWW.MOHANDESYAR.COM

حلقه‌ی اساسی متناظر با هر لینک را تشکیل می‌دهیم.

انسباط‌های KVL و KCL :

ماتریس B به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ بوده و با آن هم جهت باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ نباشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه‌ی } j \text{ در حلقه‌ی اساسی } i \text{ بوده و با آن خلاف جهت باشد.} \end{cases}$$

ماتریس B برای مثال قبلی :

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

انسباط‌های KVL و KCL :

V بردار ولتاژ شاخه‌ها $= \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_b \end{bmatrix}$ $\qquad$ i بردار جریان حلقه‌های اساسی $= \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix}$

J بردار جریان شاخه‌ها $= \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_b \end{bmatrix}$

$$B.V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 - V_5 + V_6 \\ V_2 + V_6 - V_7 \\ V_3 + V_6 - V_7 + V_8 \\ V_4 - V_5 + V_6 - V_7 + V_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{B.V = 0}$$ انسباط KVL

WWW.MOHANDESYAR.COM

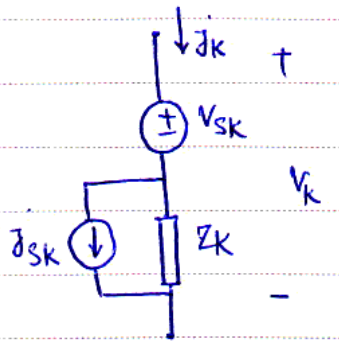
$$B^t \cdot i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ -i_1 - i_4 \\ i_1 + i_2 + i_3 + i_4 \\ -i_2 - i_3 - i_4 \\ i_3 + i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{B^t \cdot i = j}$$

اشباع KCL

معادلات حلقه‌ی اساسی: سه روش داریم: نظری / منظم / مبانی

۱- روش منظم

مجدداً تعمیم نورتن شاخه‌ای را به یاد آوریم.



$$V_k = V_{sk} + Z_k j_k - Z_k j_{sk}$$

وقتی رابطه را برای تمام شاخه‌ها بنویسیم به صورت ماتریسی خواهیم داشت:

$$V = V_s + Z_b j - Z j_s$$

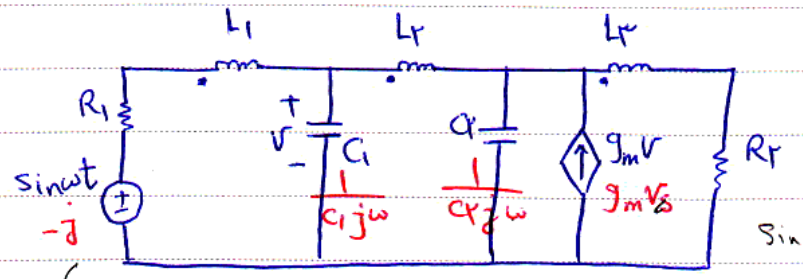
طرفین در B ضرب می‌شود:

$$\underbrace{B \cdot V}_{0} = B V_s + B Z_b \underbrace{j}_{B^t \cdot i} - B Z j_s$$

$$\Rightarrow \underbrace{B Z_b B^t}_{Z_B} \cdot i = \underbrace{B Z_b j_s - B V_s}_{e_s} \quad (A) \Rightarrow \boxed{Z_B \cdot i = e_s}$$

مولفه‌ی $B Z_b j_s$ در طرف راست رابطه‌ی (A)، عمل تبدیل منابع مستقل جریان را به منابع ولتاژ انجام می‌دهد.

مثال) در مدار زیر به روش منظم حلقه‌ی اساسی، آنالیز را انجام دهید؟



$$L = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\sin\omega t = 1\cos(\omega t - 90) = 1 \angle -90 = \cos -90 + j\sin(-90) = -j$

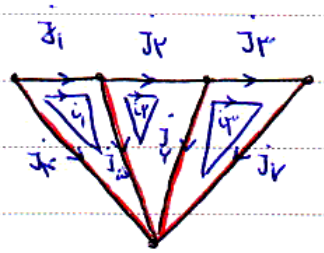
$$\sin\omega t = \cos(\omega t - 90) = e^{-j90} = \cos 90 - j\sin 90 = -j$$

$$\boxed{A\cos(\omega t + \theta) = A e^{j\theta}}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

در حوزه فازور کار می‌کنیم.

گراف :



لینک و درخت :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ماتریس یکه ناشی از قرارداد های ۱ و ۲

ابتدا برای سلف های تزویج شده :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = L i$$

$$V = L j\omega i$$

j بردار جریان شاخه‌ها

$$v_k = v_{sk} + z_k j_k - z_k j_{sk}$$

$$v_1 = 4j\omega \times j_1 + 2j\omega \times j_2 + j\omega \times j_3$$

$$v_2 = 2j\omega \times j_1 + 4j\omega \times j_2 + 2j\omega \times j_3$$

$$v_3 = j\omega \times j_1 + 2j\omega \times j_2 + 4j\omega \times j_3$$

$$v_4 = -j + R_1 \times j_4 - R_1 \times 0$$

$$v_5 = 0 + \frac{1}{C_1 j\omega} \times j_5 - \frac{1}{C_1 j\omega} \times 0$$

$$v_6 = 0 + \frac{1}{C_2 j\omega} \times j_6 - \frac{1}{C_2 j\omega} \times (-g_m v_5)$$

$$v_6 = 0 + \frac{1}{C_2 j\omega} j_6 + \frac{g_m}{C_2 j\omega}\left(\frac{1}{C_1 j\omega}\right) j_5 \Rightarrow v_6 = \frac{-g_m}{C_1 C_2 \omega^2} j_5 + \frac{1}{C_2 j\omega} j_6$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$v_7 = 0 + R_2\, j_7 - R_2 \times 0$$

به صورت ماتریسی :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{V_s} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4j\omega & 2j\omega & j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2j\omega & 4j\omega & 2j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ j\omega & 2j\omega & 4j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C_1 j\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{g_m}{C_1 C_2 \omega^2} & \frac{1}{C_2 j\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_2 \end{bmatrix}}_{Z_b} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{Z_b} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{j_s}$$

$$Z_B = B Z_b B^t$$

$$e_s = B Z_b j_s - B V_s \qquad \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

۲) روش لحظه‌ای : اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد در معادله‌ی $Z_B \cdot i = e_s$ ماتریس‌های Z_B و e_s را می‌توان مستقیماً تشکیل داد.

۱) منابع جریان وجود نداشته باشند و اگر دارند به منبع ولتاژ تبدیل شوند.

۲) سلف تزویج شده و منبع وابسته وجود نداشته باشد.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1L} \\ \vdots & & \\ Z_{L1} & \cdots & Z_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{s1} \\ \vdots \\ e_{sL} \end{bmatrix}$$

$$Z_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع امپدانس‌های موجود در حلقه اساسی } i \text{ ام} \\ i \neq j & \text{مجموع امپدانس‌های مشترک بین حلقه‌ی اساسی } i \text{ و } j \text{ (اگر جهت حلقه‌های اساسی در شاخه‌ی مشترک یکسان بود با علامت مثبت و اگر خلاف بود با علامت منفی جمع می‌زنیم)} \end{cases}$$

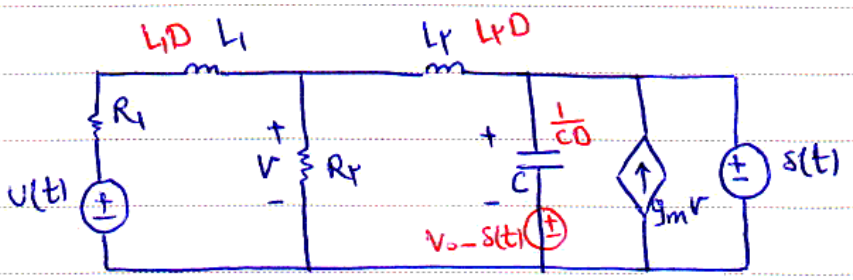
WWW.MOHANDESYAR.COM

e_{s_i} = مجموع منابع ولتاژ موجود در حلقه‌ی اساسی i (اگر از سر منفی وارد شدیم با علامت + و اگر از سر مثبت وارد شدیم با علامت منفی - جمع می‌زنیم.)

۳) روش میانبر: همان روش نظری است.

با این تفاوت که منابع وابسته نمی‌توانند وجود داشته باشند. وابستگی‌ها را حسب جریان حلقه‌ها می‌نویسیم و منابع وابسته را مانند منابع مستقل فرض می‌کنیم و معادلات را به روش نظری می‌نویسیم. در نهایت اثر وابستگی را به ماتریس Z_B برمی‌گردانیم.

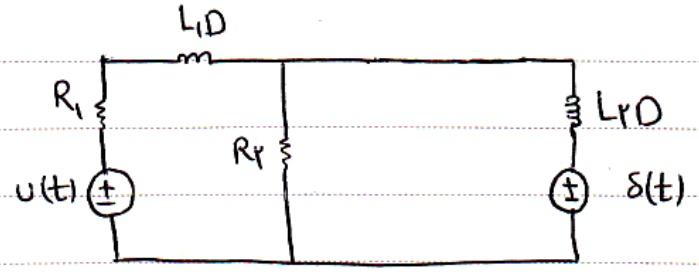
مثال)

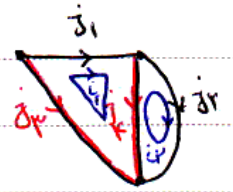


$V_C(0) = V_0$

$i_{L_1}(0) = i_{L_2}(0) = I_0$

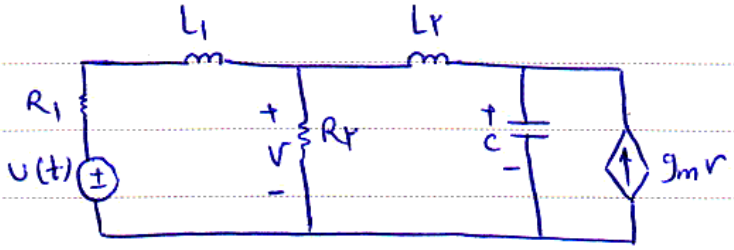
در حوزه‌ی لاپلاس - دیفرانسیل حل می‌کنیم:



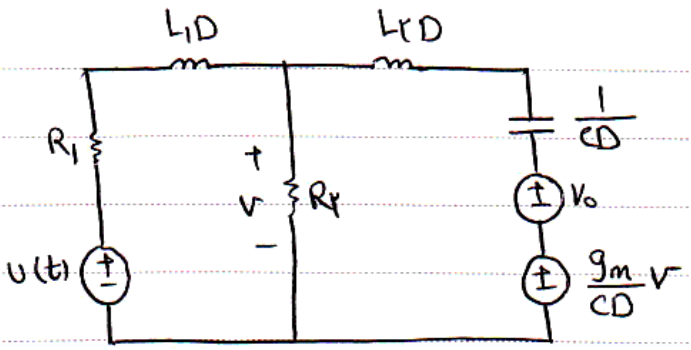


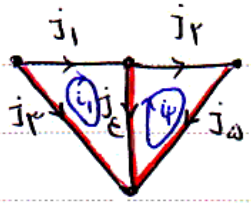
$$\begin{bmatrix} R_1+L_1D+R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+L_2D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ -\delta(t) \end{bmatrix}$$

مثال)



WWW.MOHANDESYAR.COM





$$v = R_2 i_1 - R_2 i_2$$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+L_1D & -R_2 \\ -R_2+\frac{g_m R_2}{CD} & R_2+L_2D+\frac{1}{CD}-\frac{g_m R_2}{CD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ -V_0 - \cancel{\frac{g_m R_2}{CD} i_1} + \cancel{\frac{g_m R_2}{CD} i_2} \end{bmatrix}$$

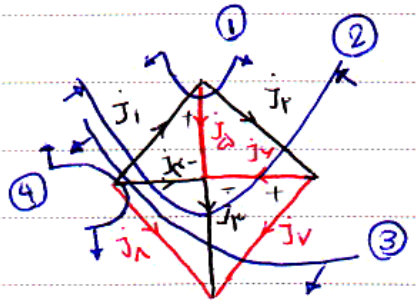
تجزیه و تحلیل گات ست :

یافتن درخت مناسب در گراف مدار :

قرارداد ۱ : شاخه‌ها را از ۱ تا L و شاخه‌های درخت را از L+1 تا b شماره گذاری می‌کنیم.

قرارداد ۲ : جهت گات ست را هم جهت با جهت شاخه متناظر در نظر می‌گیریم.

مثال) فرض کنید یک گراف و درخت آن به صورت زیر باشد :



ماتریس Q :

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$Q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات ست i بود و با آن هم جهت باشد.} \\ 0 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات ست i نباشد.} \\ -1 & \text{اگر شاخه } j \text{ در کات ست i بود و با جهت آن جهت باشد.} \end{cases}$$

در مثال قبل ۸ شاخه داشتیم.

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ماتریس یکه ناشی از قرارداد های ۱ و ۲

استنباط های KVL و KCL :

بردار جریان شاخه ها :

$$j = \begin{bmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_b \end{bmatrix}$$

بردار ولتاژ شاخه ها :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix}$$

بردار ولتاژ شاخه های درخت :

$$e = \begin{bmatrix} e_{L+1} \\ \vdots \\ e_b \end{bmatrix}$$

$$Q \cdot j = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \\ j_4 \\ j_5 \\ j_6 \\ j_7 \\ j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j_1 + j_2 + j_5 \\ j_1 - j_2 - j_3 + j_4 + j_6 \\ -j_1 + j_3 - j_4 + j_7 \\ j_1 + j_4 + j_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow \quad Q \cdot j = 0$ استنباط KCL

WWW.MOHANDESYAR.COM

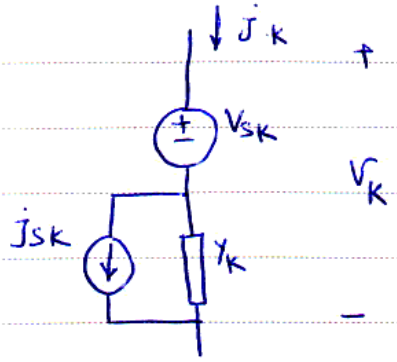
$$Q^t \cdot e = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_5 \\ e_6 \\ e_7 \\ e_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix} \Longrightarrow Q^t \cdot e = v$$

استنباط KVL ؛

معادلات کات ست اساسی ؛ $\xrightarrow{\text{منظم نظری میانبر}}$

از منظم ؛

تعمیم نمونه‌ای شاخه را مجدداً در نظر می‌گیریم.



$$j_k = j_{sk} + Y_k V_k - Y_k V_{sk}$$

وقتی این معادله را برای تمام شاخه‌ها بنویسیم، معادلات ماتریسی زیر حاصل می‌شود ؛

$$j = j_s + Y_q V - Y_q V_s$$

ضرب طرفین در Q :

$$\underbrace{Q \cdot j}_{0} = Q j_s + Q Y_q \underbrace{V}_{Q^t \cdot e} - Q Y_q V_s$$

$$\underbrace{Q Y_q Q^t}_{Y_Q} \cdot e = \underbrace{Q Y_q V_s - Q j_s}_{i_s}$$

$$\boxed{Y_Q \cdot e = i_s}$$

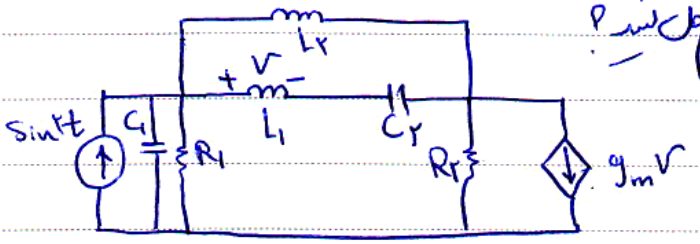
تبدیل منابع ولتاژ مستقل به جریان

مثال) مدار زیر را به روش کات ست اساسی منظم حل کنید؟

در روش کات ست

چون با ادمیتانس سروکار داریم

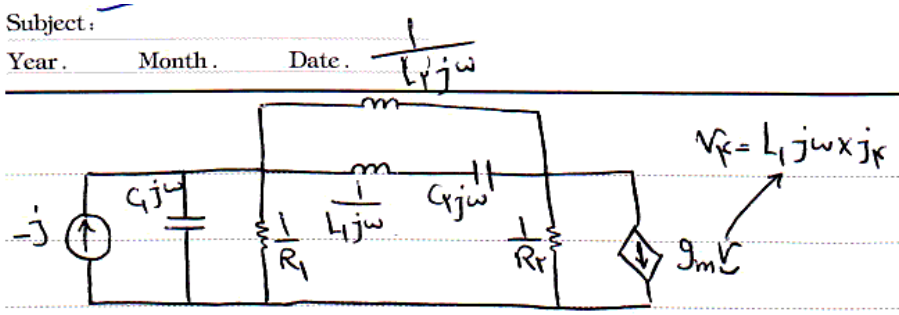
همه را به Y تبدیل می‌کنیم



مثلاً $Z_C = \frac{1}{j\omega C} \Rightarrow Y_C = j\omega C$ و $Z_L = Lj\omega \Rightarrow Y_L = \frac{1}{Lj\omega}$

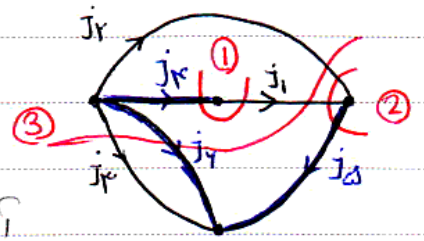
WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month. Date.



$V_4 = L_1 j\omega \times j_4$

تبدیل به Y ؟



گراف :

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

درخت آبی
سیاه لینک

$$j_1 = 0 + C_2 j\omega \times V_1 - C_2 j\omega \times 0$$

$$j_2 = 0 + \frac{1}{L_2 j\omega} V_2 - \frac{1}{L_2 j\omega} \times 0$$

$$j_3 = -(-j) + C_1 j\omega \times V_3 - C_1 j\omega \times 0$$

$$j_4 = 0 + \frac{1}{L_1 j\omega} \times V_4 - \frac{1}{L_1 j\omega} \times 0$$

$$j_5 = g_m V + \frac{1}{R_2} V_5 - \frac{1}{R_2} \times 0$$

$$j_5 = g_m \times L_1 j\omega \left(\frac{1}{L_1 j\omega}\right) V_4 + \frac{1}{R_2} V_5 \Rightarrow j_5 = 0 + g_m V_4 + \frac{1}{R_2} V_5$$

$$j_6 = \underbrace{0}_{-(-j)} + \frac{1}{R_1} V_6 - \frac{1}{R_1} \times 0$$

ادامه به عهده خودتان.

$$j_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_q = \begin{bmatrix} C_2 j\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2 j\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 j\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_1 j\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_m & \frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Y_Q = Q Y_q Q^t \\ i_s = Q Y_q V_s - Q j_s \end{cases}$$

ادامه به عهده خودتان

WWW.MOHANDESYAR.COM

۲- روش نظری: اگر شرایط زیر در مدار برقرار باشد می‌توان Y_Q و i_s را مستقیماً تشکیل داد:

۱) منابع ولتاژ موجود نباشند و اگر هستند به منبع جریان تبدیل شوند.

۲) سلف مزدوج شده وجود نداشته باشیم.

$$Y_{ij} = \begin{cases} i = j & \text{مجموع ادمیتانس‌های متصل به گره } i \text{ ام} \\ i \neq j & \text{مجموع ادمیتانس‌های مشترک گره‌های } i \text{ و } j \end{cases}$$

(اگر جهت ادمیتانس در شاخه مشترک یکسان بود با علامت مثبت و در غیر این صورت با علامت منفی جمع می‌زنیم.)

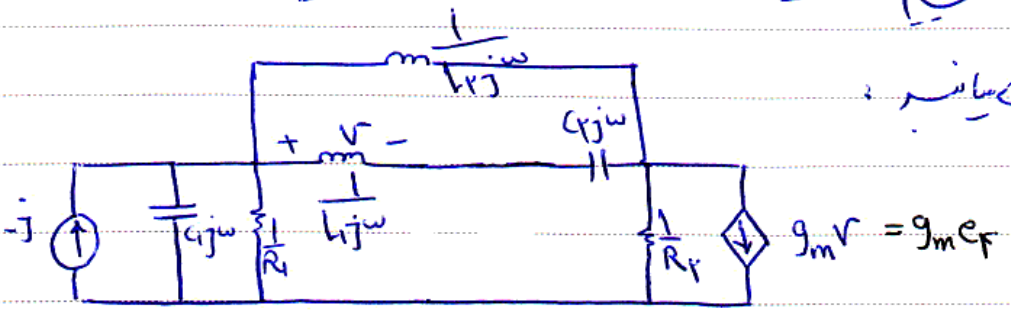
i_{s_i} = مجموع جبری منابع جریان موجود در گره i ام (اگر جهت منبع مخالف جهت گره i ام بود با علامت مثبت و در غیر این صورت با علامت منفی جمع می‌زنیم.)

۳- روش میانبر: همان روش نظری است با این تفاوت که منابع وابسته نیز می‌توانند وجود داشته باشند.

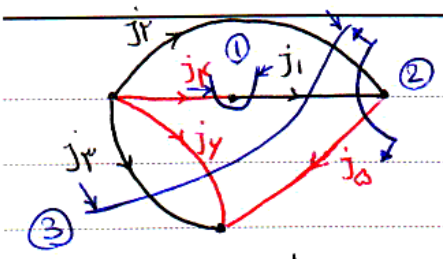
تمامی وابستگی‌ها را برحسب ولتاژ شاخه‌های درخت می‌نویسیم و منابع وابسته را مانند منابع مستقل فرض می‌کنیم.

معادلات را به روش نظری می‌نویسیم و در نهایت اثر وابستگی را به ماتریس Y_Q می‌بریم.

مثال) مثال قبل به روش میانبر:



WWW.MOHANDESYAR.COM



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1 j\omega}+C_2 j\omega & C_2 j\omega & -C_2 j\omega \\ C_2 j\omega + g_m & \frac{1}{L_2 j\omega}+C_3 j\omega+\frac{1}{R_2} & \frac{-1}{L_2 j\omega}-C_3 j\omega \\ -C_2 j\omega & \frac{-1}{L_2 j\omega}-C_3 j\omega & C_4 j\omega+\frac{1}{R_4}+C_3 j\omega+\frac{1}{L_2 j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{-j} \\ \cancel{-g_m e_4} \\ \cancel{0} \end{bmatrix}$$

$-j$

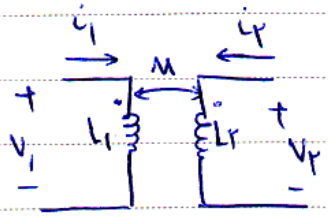
نکاتی مهم برای حل مسائل:

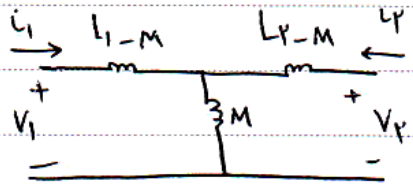
۱- در روش گره وقتی سمت اساسی منابع جریان را می‌توان به تنهایی یک شاخه در نظر گرفت.

۲- در تجزیه و تحلیل مش و حلقه اساسی منابع ولتاژ را می‌توان به تنهایی یک شاخه در نظر گرفت.

۳- در تجزیه و تحلیل گره و قطع سمت و حلقه اساسی، گراف‌ها می‌توانند غیر مسطح باشند اما در روش مش خیر.

۴- در روش‌های میانبر، گفته بودیم سلف تزویج شده نباید وجود باشد، لیکن می‌توان به جای سلف‌های تزویج شده مدار معادل قرار داد و از روش میانبر استفاده کرد.



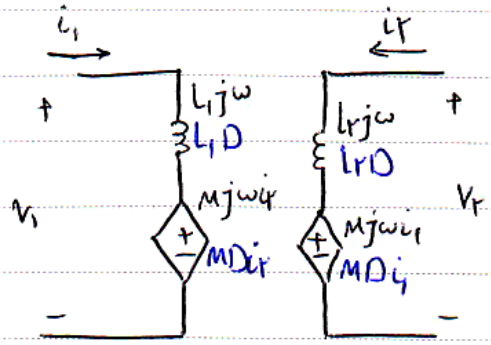


معادل اول: مدار معادل T

WWW.MOHANDESYAR.COM

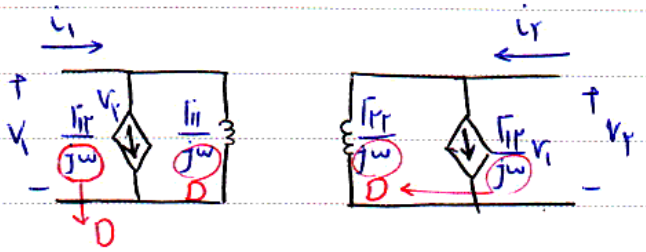
شرط استفاده از این معادل این است که سلف‌ها در مجاورت هم باشند و یا سر مشترک داشته باشند.

معادل دوم :



کاربرد در روش مش و حلقه اساسی.

معادل سوم :



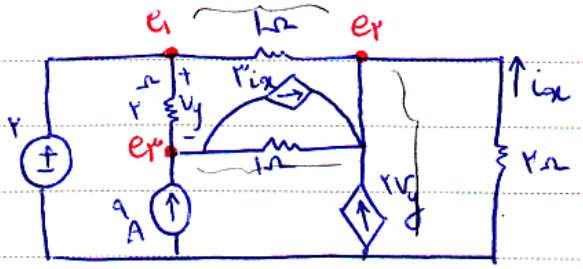
کاربرد در روش گره و کات ست اساسی.

۵ـ در بعضی مدارات و در هنگام استفاده از روش‌های نوری منابع مستقلی وجود دارد که قابل تبدیل نیستند یا تبدیل آن‌ها به سختی انجام می‌شود. مثلاً منابع جریان در تبدیل‌های مش و حلقه اساسی و منابع ولتاژ در تبدیل‌های گره و کات ست اساسی.

در این موارد به صورت زیر عمل می‌کنیم :

الف) در تحلیل‌های گره و کات ست اساسی، این منابع (منابع ولتاژ) e، ولتاژ گره یا ولتاژ یک شاخه در خت‌اند. در این حالت در روش‌های نوری، ولتاژ مشخص شده را در برابر e قرار می‌دهیم، پس سطر مربوطه را از ماتریس Y_n یا Y_Q حذف می‌کنیم.

مثال) حل از روش پتانسیل گره



با امداد مربوط به e_2

WWW.MOHANDESYAR.COM

$Y_n \cdot e = I_s \qquad i_x = \frac{-e_2}{2} \longrightarrow 3 i_x = -\frac{3}{2} e_2 \qquad V_y = e_1 - e_3$

$\Rightarrow 2V_y = 2e_1 - 2e_3$

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1-2 & 1+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2} & -1+2 \\ -\frac{1}{2} & -1-\frac{3}{2} & 1+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}e_2 + 2e_1 - 2e_3 \\ -9 + \frac{3}{2}e_2 \end{bmatrix} \qquad 9 + \frac{3}{2}e_2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$-6 + 4e_2 + e_3 = 0 \longrightarrow 4e_2 + e_3 = 6 \longrightarrow \boxed{e_3 = 6 - 4e_2}$

$-1 - \frac{5}{2} e_2 + \frac{3}{2} e_3 = -9 \longrightarrow -2 - 5e_2 + 3e_3 = -18 \longrightarrow \boxed{3e_3 - 5e_2 = -16}$

$18 - 12e_2 - 5e_2 = -16 \longrightarrow -17e_2 = -34 \longrightarrow \boxed{e_2 = 2} \qquad e_3 = 6 - 4\times 2 = -2 \longrightarrow \boxed{e_3 = -2}$

$i_x = -\frac{e_2}{2} = -1$

ب) در تحلیل مش در حلقه‌ی اساسی، این منابع (منابع جریان)، جریان یک مش یا جریان یک حلقه‌ی اساسی اند.

در این حالت در روش های نظری، جریان مشخص شده را در بردار i قرار می‌دهیم، پس سطر مربوطه را از ماتریس Z_m یا Z_B حذف می‌کنیم.

WWW.MOHANDESYAR.COM

فصل ۱۲: معادلات حالت

متغیرهای حالت: کوچکترین دسته از متغیرهای شبکه است به طوریکه توان با دانستن آن مقادیر $t=t_0$ و دانستن منابع در $t>t_0$ توان رفتار شبکه را در هر لحظه $t\geq t_0$ تعیین کرد. اگر دست کم n متغیر حالت $x_1(t)$، $x_2(t)$، ... و $x_n(t)$ وجود داشته باشند، بردار حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

معادلات حالت: اگر معادلات دیفرانسیل یک شبکه را به صورت زیر بنویسیم، می‌گوییم معادلات حالت تشکیل شده.

$$\frac{dx(t)}{dt}=f\big(x(t),u(t)\big) \qquad \frac{dx(t)}{dt}=\dot{x}(t)$$

بردار حالت

بردار ورودی‌های سیستم

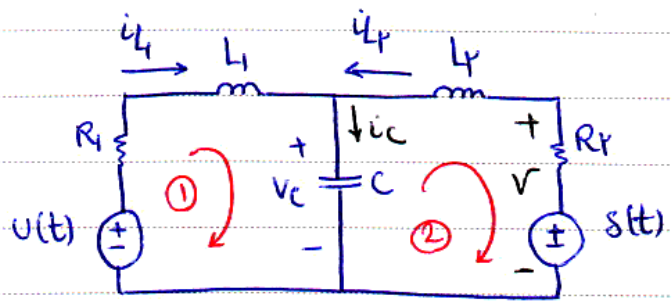
در شبکه‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان:

$$\dot{x}(t)=A\,x(t)+B\,u(t)$$

خروجی‌های سیستم

$$y(t)=C\,x(t)+D\,u(t)$$

مثال) مدار زیر را در نظر بگیرید:



$$KVL\ (1):\quad -u(t)+R_1 i_{L_1}+L_1\frac{di_{L_1}}{dt}+V_C=0$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{di_{L_1}}{dt}=\frac{-R_1}{L_1}i_{L_1}-\frac{1}{L_1}V_C+\frac{1}{L_1}u(t)}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$KVL(2):\quad -V_C - L_2\frac{di_{L_2}}{dt} - R_2 i_{L_2} + \delta(t) = 0$$

$$\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{-R_2}{L_2} i_{L_2} - \frac{1}{L_2} V_C + \frac{1}{L_2}\delta(t)$$

$$KCL:\quad i_{L_1} + i_{L_2} = C\frac{dV_C}{dt} \longrightarrow \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} i_{L_1} + \frac{1}{C} i_{L_2}$$

در اساس این معادلات می‌توان بردار حالت را به صورت زیر تعیین کرد:

خروجی سیستم به صورت روبرو است:

$$V = -R_2 i_{L_2} + \delta(t)$$

حال:

$$\dot{x} = Ax + BU \qquad y = Cx + DU$$

بردار ورودی‌ها

بردار خروجی‌ها

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{V}_C \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} \\ 0 & \frac{-R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ V_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} U(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}}_{U}$$

$$V = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -R_2 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ V_C \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} U(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}}_{U}$$

به طور کلی اگر در یک سیستم، n متغیر حالت، m ورودی و k خروجی داشته باشیم، ابعاد ماتریس‌های فضای حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$[\dot{x}]_{n\times 1} = [A]_{n\times n}[x]_{n\times 1} + [B]_{n\times m}[U]_{m\times 1}$$

$$[y]_{k\times 1} = [C]_{k\times n}[x]_{n\times 1} + [D]_{k\times m}[U]_{m\times 1}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

کات ست یک درخت بقیه لینک
حلقه یک لینک بقیه درخت

سلف باید لینک باشد. باید خازن درخت باشد

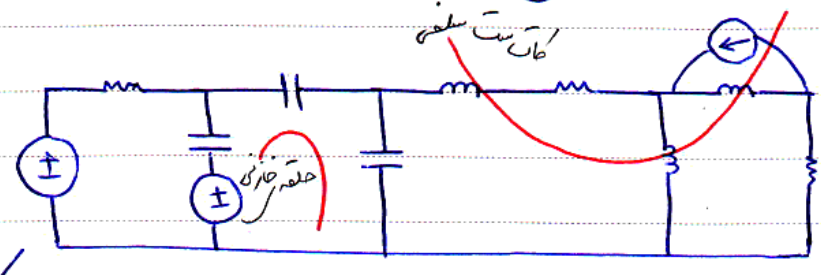
Subject:
Year. Month. Date. ( )

الگوریتم معادلات حالت :

۱- انتخاب متغیرهای حالت : براساس عناصر ذخیره کننده انرژی انجام می‌شود. در سیستم‌های الکتریکی، معمولاً جریان سلف‌ها و ولتاژ خازن‌ها به عنوان متغیرهای حالت انتخاب می‌شوند. به طور مشابه می‌توان شار سلف‌ها و بار خازن‌ها را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب نمود.

۲- انتخاب درخت مناسب : درختی انتخاب می‌کنیم که شامل خازن‌ها بوده و شامل سلف‌ها نباشد.

سوال: آیا همیشه امکان پذیر است؟ خیر، در شرایطی که حلقه خازنی داریم، یکی از خازن‌ها را در درخت انتخاب نمی‌کنیم. همچنین در شرایطی که کات ست سلفی داریم، یکی از سلف‌ها را انتخاب نمی‌کنیم. در نتیجه تعداد حلقه‌های خازنی و کات ست‌های سلفی از متغیرهای حالت کم می‌شود. حلقه خازنی و کات ست سلفی را با کشیدن منابع مستقل می‌توان مشخص داد.

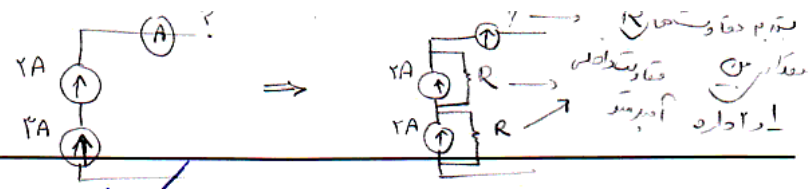


۴=۱-۱-۶ : تعداد متغیرهای حالت ، ۱ : تعداد حلقه خازنی ، ۱ : تعداد کات ست سلفی ، ۶ : تعداد عناصر ذخیره کننده

۳- KCL را در کات ست‌های خازنی می‌نویسیم و سعی می‌کنیم که برحسب متغیرهای حالت نوشته شود.

۴- KVL را در حلقه‌های اساسی شامل سلف‌ها می‌نویسیم و سعی می‌کنیم که برحسب متغیرهای حالت نوشته شود.

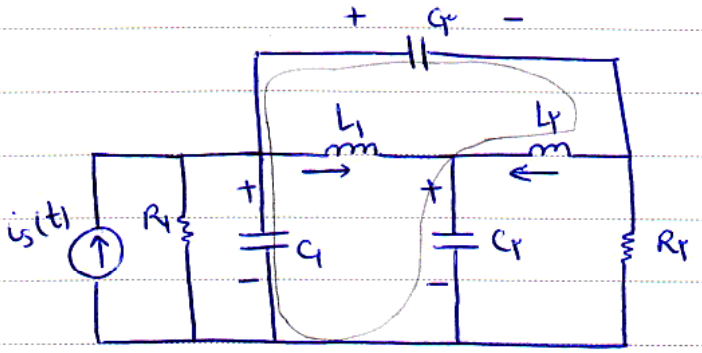
WWW.MOHANDESYAR.COM

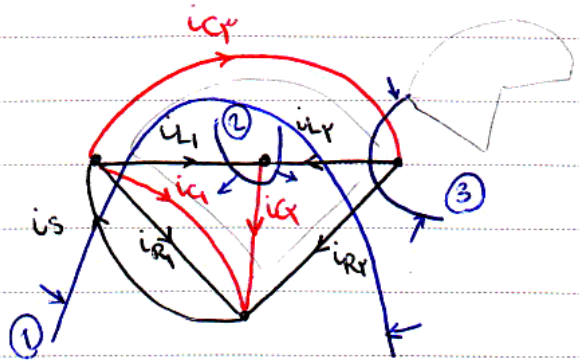


۵- درصورت وجود متغیر غیرحالت در مراحل ۳ و ۴ اگر این متغیر غیرحالت، متغیر یک لینک بود، حلقه اساسی را در آن لینک می‌نویسیم تا متغیر به حالت تبدیل شود.

۶- درصورت وجود متغیر غیرحالت در مراحل ۳ و ۴، درصورتیکه این متغیر مربوط به یک شاخه درخت بود، حالت ست اساسی را در آن شاخه درخت می‌نویسیم تا متغیر به حالت تبدیل شود.

مثال) معادلات حالت مدار زیر؟





منبع جریان را به عنوان یک شاخه مستقل در نظر می‌گیریم

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix}$$

$$KCL\ (1):\quad i_{L_1} + i_{L_2} + C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} + i_{R_1} - i_s + i_{R_2} = 0$$

غیرحالت غیرحالت

$$\boxed{\frac{dv_{C_1}}{dt} = \frac{-1}{C_1} i_{L_1} - \frac{1}{C_1} i_{L_2} - \frac{1}{C_1} i_{R_1} - \frac{1}{C_1} i_{R_2} + \frac{1}{C_1} i_s} \quad ①$$

$$KCL\ (2):\quad C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} - i_{L_1} - i_{L_2} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{dv_{C_2}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_{L_1} + \frac{1}{C_2} i_{L_2}}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

غیرحالت

$$KCL(3):\ C_3\frac{dv_{C_3}}{dt} - i_{L_2} - i_{R_2} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{dv_{C_3}}{dt} = \frac{1}{C_3} i_{L_2} + \frac{1}{C_3} i_{R_2}} \quad ②$$

$$KVL\ (1):\ L_1\frac{di_{L_1}}{dt} + v_{C_2} - v_{C_1} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{1}{L_1} v_{C_1} - \frac{1}{L_1} v_{C_2}}$$

$$KVL\ (2):\ L_2\frac{di_{L_2}}{dt} + v_{C_2} - v_{C_1} + v_{C_3} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{1}{L_2} v_{C_1} - \frac{1}{L_2} v_{C_2} - \frac{1}{L_2} v_{C_3}}$$

حذف غیرحالت i_{R_1}:

$$KVL:\ R_1 i_{R_1} - v_{C_1} = 0 \longrightarrow \boxed{i_{R_1} = \frac{v_{C_1}}{R_1}}$$

حذف غیرحالت i_{R_2}:

$$KVL:\ R_2 i_{R_2} - v_{C_1} + v_{C_3} = 0 \longrightarrow$$

$$\boxed{i_{R_2} = \frac{1}{R_2} v_{C_1} - \frac{1}{R_2} v_{C_3}}$$

بازنویسی ① و ②

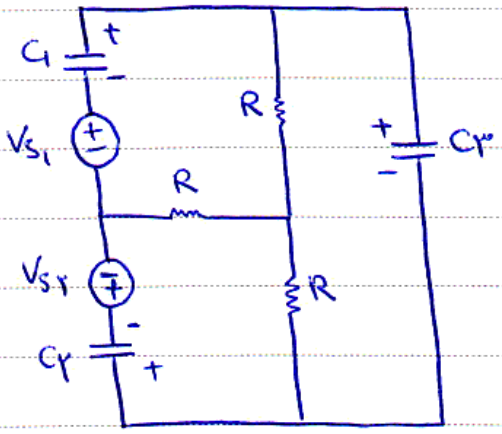
$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} i_{L_1} - \frac{1}{C_1} i_{L_2} - \frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_{C_1} - \frac{1}{R_2} v_{C_3} + \frac{1}{C_1} i_s$$

$$\frac{dv_{C_3}}{dt} = \frac{1}{C_3} i_{L_2} + \frac{1}{C_3}\frac{v_{C_1}}{R_2} - \frac{1}{C_3 R_2} v_{C_3}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L_1} \\ \dot{i}_{L_2} \\ \dot{v}_{C_1} \\ \dot{v}_{C_2} \\ \dot{v}_{C_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & \frac{-1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} & \frac{-1}{L_2} & \frac{-1}{L_2} \\ \frac{-1}{C_1} & \frac{-1}{C_1} & \frac{-1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) & 0 & \frac{-1}{R_2} \\ \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_3} & \frac{1}{C_3 R_2} & 0 & \frac{-1}{C_3 R_2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ i_{L_2} \\ v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} i_s(t)$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

مثال) قبلاً گفتیم اگر متغیرهای حالت را جسب هم بنویسند از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود مانند حلقه خازنی و کات ست

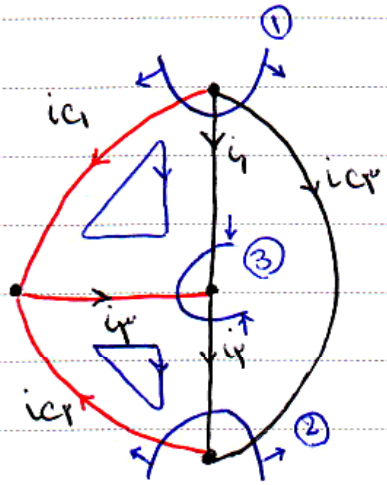


سلفی:

$$V_{C2} + V_{S2} - V_{S1} - V_{C1} + V_{C3} = 0$$

$$V_{C3} = V_{C1} - V_{C2} + V_{S1} - V_{S2}$$

یعنی از متغیرهای حالت یکی کم می‌شود. از بین سه متغیر موجود،



۲ تا را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

$$x = \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}$$

$$KCL(1):\quad C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} + i_1 + i_{C3} = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{V}_{C1} = \frac{-1}{C_1} i_1 - \frac{1}{C_1} i_{C3}} \quad (1)$$

غیرحالت — غیرحالت

$$KCL(2):\quad C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} - i_2 - i_{C3} = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{V}_{C2} = \frac{1}{C_2} i_2 + \frac{1}{C_2} i_{C3}} \quad (2)$$

غیرحالت — غیرحالت

حذف غیرحالت i_1 : i_1 متغیر یک لینک است. حلقه اساسی این لینک را می‌نویسیم.

$$KVL:\quad R i_1 - R i_3 - V_{S1} - V_{C1} = 0 \longrightarrow i_1 = i_3 + \frac{1}{R} V_{C1} + \frac{1}{R} V_{S1} \quad (A)$$

غیرحالت

i_3 مربوط به یک شاخه درخت است. کات ست متناظر این شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(3):\quad i_3 + i_1 - i_2 = 0 \longrightarrow i_3 = i_2 - i_1$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

جایگذاری در (A)

$$2i_1 = i_2 + \frac{1}{R}V_{C_1} + \frac{1}{R}V_{S_1}$$

غیرحالت

$$\longrightarrow \boxed{i_1 = \frac{1}{2}i_2 + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}} \quad (B)$$

i_2 متغیر لینک است. حلقه اساسی این لینک را می‌نویسیم.

$$KVL(2): Ri_2 + V_{C_2} + V_{S_2} + Ri_3 = 0 \longrightarrow i_2 = \underbrace{-i_3}_{i_1 - i_2} - \frac{1}{R}V_{C_2} - \frac{1}{R}V_{S_2}$$

$$2i_2 = i_1 - \frac{1}{R}V_{C_2} - \frac{1}{R}V_{S_2} \longrightarrow \boxed{i_2 = \frac{1}{2}i_1 - \frac{1}{2R}V_{C_2} - \frac{1}{2R}V_{S_2}} \quad (C)$$

جایگذاری (C) در (B):

$$i_1 = \frac{1}{4}i_1 - \frac{1}{4R}V_{C_2} - \frac{1}{4R}V_{S_2} + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}$$

$$\frac{3}{4}i_1 = \frac{-1}{4R}V_{C_2} - \frac{1}{4R}V_{S_2} + \frac{1}{2R}V_{C_1} + \frac{1}{2R}V_{S_1}$$

$$\boxed{i_1 = \frac{-1}{3R}V_{C_2} - \frac{1}{3R}V_{S_2} + \frac{2}{3R}V_{C_1} + \frac{2}{3R}V_{S_1}} \quad (E)$$

با جایگذاری (E) در (C)، i_2 نیز برحسب متغیرهای حالت بیان می‌شود.

$$i_2 = \frac{-1}{6R}V_{C_2} - \frac{1}{6R}V_{S_2} + \frac{1}{3R}V_{C_1} + \frac{1}{3R}V_{S_1} - \frac{1}{2R}V_{C_2} - \frac{1}{2R}V_{S_2}$$

$$\boxed{i_2 = \frac{1}{3R}V_{C_1} - \frac{2}{3R}V_{C_2} - \frac{2}{3R}V_{S_2} + \frac{1}{3R}V_{S_1}} \quad (F)$$

i_1 و i_2 طبق روابط E و F، هر دو برحسب حالت تبدیل شدند.

حذف غیرحالت i_3: دانستیم که: $V_{C_3} = V_{C_1} - V_{C_2} + V_{S_1} - V_{S_2}$

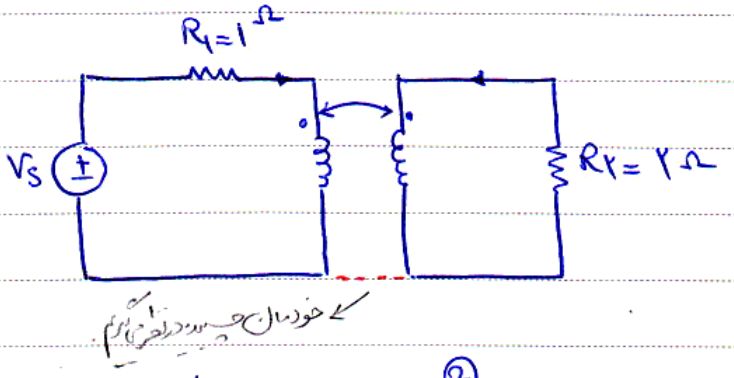
WWW.MOHANDESYAR.COM

$$i_{C_3} = C_3 \dot{V}_{C_3} \longrightarrow \boxed{i_{C_3} = C_3 \dot{V}_{C_1} - C_3 \dot{V}_{C_2} + C_3 \dot{V}_{S_1} - C_3 \dot{V}_{S_2}} \quad (9)$$

با جایگذاری g در ① و ② و استفاده از سایر روابط نامگذاری شده، معادلات حالت به دست می‌آید. اما به جهت

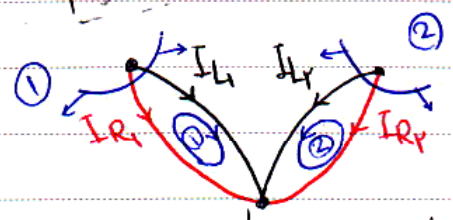
داشجو!

مثال)



$$L = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

گراف:



برای هر یک از سلف‌ها، حلقه اساسی را می‌نویسیم.

$$\lambda_1 = L_1 i_1 \pm M i_2 \xrightarrow{d/dt} V_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}$$

$$KVL\ (1):\ 1 \times \frac{dI_{L_1}}{dt} + 1 \frac{dI_{L_2}}{dt} - V_S - 1 \times I_{R_1} = 0$$

غیرحالت

$$\boxed{\dot{I}_{L_1} + \dot{I}_{L_2} = I_{R_1} + V_S} \quad (1)$$

$$KVL(2):\ 2 \frac{dI_{L_2}}{dt} + 1 \times \frac{dI_{L_1}}{dt} - 2 I_{R_2} = 0 \longrightarrow \boxed{2\dot{I}_{L_2} + \dot{I}_{L_1} = 2 I_{R_2}} \quad (2)$$

غیرحالت

حذف غیرحالت i_{R_1}: i_{R_1} متغیر شاخه درخت است، کات‌ست اساسی متناظر با آن شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(1):\ I_{L_1} + I_{R_1} = 0 \longrightarrow \boxed{I_{R_1} = -I_{L_1}} \quad (A)$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

حذف غیرحالت I_{R_2} : متغیر یک شاخه درخت است، کات ست اساسی آن را می‌نویسیم.

$$\text{kcl (2)}: \quad I_{L_2} + I_{R_2} = 0 \longrightarrow \boxed{I_{R_2} = -I_{L_2}} \quad (B)$$

با جایگذاری (A) در (1) و (B) در (2)،

$$\begin{cases} \dot{I}_{L_1} + \dot{I}_{L_2} = -I_{L_1} + V_s \longrightarrow \dot{I}_{L_1} = -I_{L_1} - \dot{I}_{L_2} + V_s & (3) \\ 2\dot{I}_{L_2} + \dot{I}_{L_1} = -2I_{L_2} & (4) \end{cases}$$

با جایگذاری (3) در (4):

$$2\dot{I}_{L_2} - I_{L_1} - \dot{I}_{L_2} + V_s = -2I_{L_2} \longrightarrow \boxed{\dot{I}_{L_2} = I_{L_1} - 2I_{L_2} - V_s} \quad (5)$$

جایگذاری (5) در (3):

$$\dot{I}_{L_1} = -I_{L_1} - I_{L_1} + 2I_{L_2} + V_s + V_s$$

$$\boxed{\dot{I}_{L_1} = -2I_{L_1} + 2I_{L_2} + 2V_s} \quad (6)$$

از (5) و (6):

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_{L_1} \\ \dot{I}_{L_2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} I_{L_1} \\ I_{L_2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{B} V_s$$

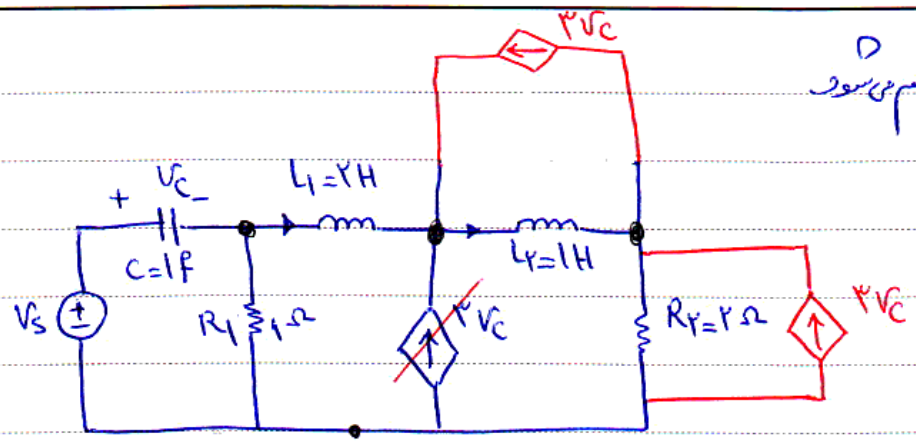
نکته) در شرایطی که حلقه خازنی و کات ست سلفی داشته باشیم، به دلیل اینکه متغیرهای حالت برحسب هم نوشته می‌شوند، از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود.

وجود منابع وابسته نیز علاوه بر شرایط فوق، ممکن است متغیرهای حالت را برحسب هم بیان کند، در این صورت

WWW.MOHANDESYAR.COM

باز هم از تعداد متغیرهای حالت کم می‌شود

مثال)



تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی ۳ است. به نظر می‌رسد ۳ متغیر حالت داشته باشیم ولی اگر دقت کنیم، مشاهده می‌کنیم که:

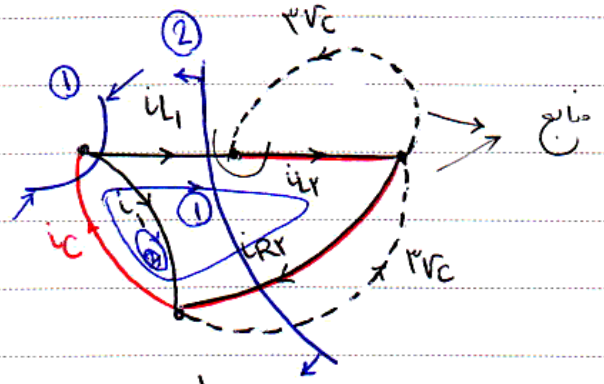
$$KCL: \quad 3V_C = i_{L_2} - i_{L_1}$$

یعنی یکی از متغیرهای حالت برحسب بقیه بیان می‌شود، در نتیجه ۲ متغیر حالت داریم. از ۳ متغیر موجود، ۲ تا را به دلخواه انتخاب می‌کنیم.

$$x = \begin{bmatrix} i_{L_1} \\ V_C \end{bmatrix}$$

حال متغیرهای حالت را به دست می‌آوریم:

گراف:



$$KCL\ (1): \quad C\frac{dV_C}{dt} - i_1 - i_{L_1} = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{V}_C = \frac{1}{C} i_{L_1} + \frac{1}{C} i_1} \quad ①$$

غیرحالت

$$KVL\ (1): \quad L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt} + R_2 i_{R_2} - V_S + V_C = 0$$

غیرحالت

$$\boxed{L_1 \dot{i}_{L_1} + L_2 \dot{i}_{L_2} + R_2 i_{R_2} - V_S + V_C = 0} \quad ②$$

غیرحالت

WWW.MOHANDESYAR.COM

حذف غیرحالت i_1 : i_1 متغیر یک لینک است، حلقه اساسی آن را می‌نویسیم.

$$KVL(2):\ R_1 i_1 - V_s + V_c = 0 \longrightarrow \boxed{i_1 = \frac{-1}{R_1} V_c + \frac{1}{R_1} V_s} \quad (A)$$

حذف غیرحالت i_{R_2} : i_{R_2} متغیر یک شاخه درخت است. کات ست اساسی این شاخه را می‌نویسیم.

$$KCL(2):\ i_{R_2} - i_{L_1} - 3V_c = 0 \longrightarrow i_{R_2} = i_{L_1} + 3V_c \quad (B)$$

حذف غیرحالت i_{L_2} :

داشتیم: $i_{L_2} = i_{L_1} + 3V_c \longrightarrow \boxed{\dot{i}_{L_2} = \dot{i}_{L_1} + 3\dot{V}_c} \quad (C)$

با جایگذاری (A)، (B)، (C) در (1) و (2)

$$\boxed{\dot{V}_c = \frac{1}{C} i_{L_1} - \frac{1}{R_1 C} V_c + \frac{1}{C R_1} V_s} \quad (3)$$

$$L_1 \dot{i}_{L_1} + L_2 \dot{i}_{L_1} + 3L_2 \dot{V}_c + R_2 i_{L_1} + 3R_2 V_c - V_s + V_c = 0$$

$$(L_1 + L_2)\dot{i}_{L_1} + \underbrace{\frac{3L_2}{C} i_{L_1} - \frac{3L_2}{R_1 C} V_c + \frac{3L_2}{R_1 C} V_s}_{3L_2 \dot{V}_c} + R_2 i_{L_1} + 3R_2 V_c - V_s + V_c = 0$$

$$\boxed{(L_1 + L_2)\dot{i}_{L_1} + \left(\frac{3L_2}{C} + R_2\right) i_{L_1} + \left(1 + 3R_2 - \frac{3L_2}{R_1 C}\right) V_c + V_s\left(\frac{3L_2}{R_1 C} - 1\right) V_s = 0}$$

عددگذاری:

$$\boxed{\dot{V}_c = i_{L_1} - V_c + V_s}$$

$$3\dot{i}_{L_1} + 5 i_{L_1} + 4V_c + 2V_s = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{i}_{L_1} = -\frac{5}{3} i_{L_1} - \frac{4}{3} V_c - \frac{2}{3} V_s}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_{L_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_C \\ i_{L_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} v_S$$

نکته) در صورت لزوم می‌توان منابع را به عنوان یک شاخه مستقل در نظر گرفت، در این صورت سعی می‌شود منابع و کلاً جزء شاخه‌های درخت و منابع جریان جزء لینک‌ها باشند.

WWW.MOHANDESYAR.COM

فصل ۱۳: تبدیلات لاپلاس

از این روش برای آنالیز مدارات خطی و تغییرناپذیر با زمان استفاده می‌شود.

ابتدا مروری بر روابط لاپلاس:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s-\alpha} \qquad \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[\sin\beta t] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \qquad \mathcal{L}[\cos\beta t] = \frac{s}{s^2+\beta^2}$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = s^n$$

مثال)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3!}\cdot\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = \frac{1}{6}t^3$$

* در بسیاری از مواقع، معکوس گیری از لاپلاس و یا لاپلاس گیری از توابع از خواص تبدیل لاپلاس استفاده می‌شود.

مروری بر خواص:

1)

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)] = F(s-\alpha)$$

مثال)

$$\mathcal{L}[e^{-2t}\cos(3t)] = ?$$

$$\mathcal{L}[\cos(3t)] = \frac{s}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}[e^{-2t}\cos 3t] = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

۲) $$L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

مثال) $$L\left[t^2 e^{3t}\right] = ? \quad (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-3}\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-3)^2}\right) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

۳) $$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$$

$2 = 2\times 1 \longrightarrow L[\delta(t)]$

حکم ضربه دارد.

۴) $$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f(0^-) - \dots - s f(0^-) - f(0^-)$$

مشتقات ضربه $\quad L\left[\delta^{(n)}(t)\right] = s^n$

نکته: باید به هنگام استفاده از قاعده مشتق گیری، ضربه‌هایی که ناشی از $f(0^-)$ ظاهر می‌شود را فراموش نکرد.

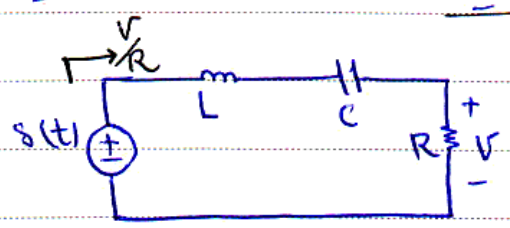
قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی:

قضیه مقدار نهایی: $$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

قضیه مقدار اولیه: $$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

یادآوری: پاسخ ضربه یک مدار همان پاسخ حالت صفر است. (شرایط اولیه صفر)

مثال) در مدار زیر با استفاده از تبدیل لاپلاس، پاسخ ضربه سیستم را بدست آورید؟ (تابع تبدیل سیستم؟)



پاسخ ضربه ⟸

شرایط اولیه صفر

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\delta(t) = L\frac{d}{dt}\left[\frac{v}{R}\right] + \frac{1}{C}\int \frac{v}{R}\,dt + \cancel{v_c(0)} + v$$

هدف به دست آوردن v است.

$$\delta(t) = \frac{L}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}\int v\,dt + v \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 = \frac{L}{R}\left[sV(s) - \cancel{v(0^-)}\right] + \frac{1}{RCs}V(s) + V(s)$$

$$1 = V(s)\left[\frac{Ls}{R} + \frac{1}{RCs} + 1\right]$$

$$1 = V(s)\left[\frac{LCs^2 + 1 + RCs}{RsC}\right] \longrightarrow V(s) = \frac{RCs}{LCs^2 + 1 + RCs} \Rightarrow V(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

* برای به دست آوردن پاسخ در حوزه زمان باید معکوس تبدیل لاپلاس را انجام داد.

بسط به کسرهای جزئی:

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{P(s)}{Q(s)} \qquad m \leq n$$

ریشه‌های صورت $\quad P(s) = 0 \xrightarrow{\text{صفرها}} z_1, z_2, \ldots, z_m$

ریشه‌های مخرج $\quad Q(s) = 0 \xrightarrow{\text{قطب‌ها}} p_1, p_2, \ldots, p_n$

۱- قطب‌ها حقیقی و ساده

$$Q(s) = (s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)\cdots(s-p_n)$$

$$F(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j}{(s-p_j)} \qquad k_j = (s-p_j)F(s)\Big|_{s=p_j}$$

مثال)

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

$$k_1 = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{2}{s+2}\Big|_{s=-1} = 2$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$K_2 = (s+2)F(s)\Big|_{s=-2} = \frac{2}{s+1}\Big|_{s=-2} = -2$$

$$f(t) = \left[2e^{-t} - 2e^{-2t}\right]u(t)$$

۲- قطب‌ها حقیقی ولی تکراری:

$$Q(s) = (s-p_1)^{n_1}(s-p_2)^{n_2}(s-p_3)^{n_3}\cdots(s-p_r)^{n_r}$$

$$F(s) = \frac{k_{11}}{(s-p_1)} + \frac{k_{12}}{(s-p_1)^2} + \cdots + \frac{k_{1n_1}}{(s-p_1)^{n_1}} +$$

$$\frac{k_{21}}{(s-p_2)} + \frac{k_{22}}{(s-p_2)^2} + \cdots + \frac{k_{2n_2}}{(s-p_2)^{n_2}} +$$

$$\vdots$$

$$\frac{k_{r1}}{(s-p_r)} + \frac{k_{r2}}{(s-p_r)^2} + \cdots + \frac{k_{rn_r}}{(s-p_r)^{n_r}}$$

$$k_{in_i} = (s-p_i)^{n_i} F(s)\Big|_{s=p_i}$$

$$k_{in_{i-1}} = \frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^{n_i} F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$k_{in_{i-2}} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_i)^{n_i} F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$k_{in_{i-3}} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{ds^3}\left[(s-p_i)^{n_i} F(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

$$\vdots$$

مثال)

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^3 s^2}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$= \frac{k_{11}}{(s+1)} + \frac{k_{12}}{(s+1)^2} + \frac{k_{13}}{(s+1)^3} + \frac{k_{21}}{s} + \frac{k_{22}}{s^2}$$

$$k_{13} = (s+1)^3 F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{s^2}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$k_{12} = \frac{d}{ds}\left[(s+1)^3 F(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s^2}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{-2}{s^3}\Big|_{s=-1} = 2$$

$$k_{11} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3 F(s)\right]\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{s^3}\right]\Big|_{s=-1} = \frac{3}{s^4}\Big|_{s=-1} = 3$$

$$k_{22} = \left[s^2 F(s)\right]\Big|_{s=0} = \frac{1}{(s+1)^3}\Big|_{s=0} = 1$$

$$k_{21} = \frac{d}{ds}\left[s^2 F(s)\right]\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right]\Big|_{s=0} = \frac{-3}{(s+1)^4}\Big|_{s=0} = -3$$

$$f(t) = \left[3e^{-t} + 2te^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t} + t - 3\right]u(t)$$

۳- قطب‌های مزدوج:

$$F(s) = \frac{k_1}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{k_2}{s-(\alpha-j\beta)} \qquad s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

$$k_1 = |k| \angle \theta_k$$

تمرین) نشان دهید k_1 و k_2 مزدوج هستند؟

$$k_2 = |k| \angle -\theta_k \qquad F(s) = \frac{k}{s-(\alpha+j\beta)} + \frac{k^*}{(s-(\alpha-j\beta))}$$

$$f(t) = k e^{(\alpha+j\beta)t} + k^* e^{(\alpha-j\beta)t}$$

$$f(t) = |k| e^{j\theta_k} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{j\beta t} + |k| e^{-j\theta_k} \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{-j\beta t}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$f(t) = |k|\, e^{\alpha t}\left[e^{j(\beta t+\theta_k)} + e^{-j(\beta t+\theta_k)}\right]$$

$$\boxed{f(t) = 2|k|\, e^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta_k)}$$

مثال)

$$F(s) = \frac{s^2+3s+7}{(s^2+4s+8)(s+1)} \qquad P: -2+2j,\ -2-2j,\ -1$$

$$F(s) = \frac{k}{(s-(-2+2j))} + \frac{k^*}{(s-(-2-2j))} + \frac{k_1}{s+1}$$

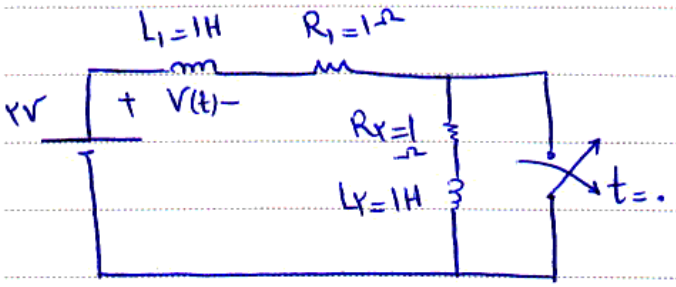
$$k = (s-(-2+2j))\,F(s)\Big|_{s=-2+2j} = \frac{(-2+2j)^2+3(-2+2j)+7}{(-2+2j+2+2j)(-2+2j+1)} = \frac{j}{4} = \frac{1}{4}\angle 90^\circ$$

$$\begin{cases} |k| = \frac{1}{4} \\ \theta_k = 90^\circ \end{cases}$$

$$k_1 = (s+1)\,F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{s^2+3s+7}{s^2+4s+8}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$\rightarrow f(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-2t}\cos(2t+90^\circ) + e^{-t}\right]u(t)$$

مثال) در مدار زیر با استفاده از آنالیز در حوزه‌ی لاپلاس، $V(t)$ را به دست آورید.



توضیحی در مورد مدارهای کلیدزن:

اگر در لحظه‌ی $t = t_0$، کلید تغییر وضعیت دهد آنالیز را در سه مرحله‌ی زیر انجام می‌دهیم:

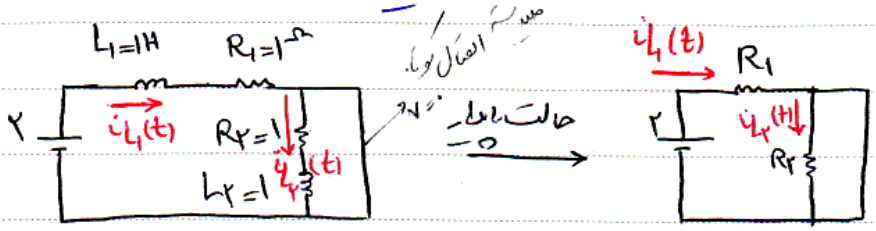
WWW.MOHANDESYAR.COM

۱) $t \leq t_0$ فرض می‌شود که مدار در وضعیت پایدار خود قرار دارد، یعنی در رژیم DC، سلف‌ها اتصال کوتاه و خازن‌ها اتصال باز فرض می‌شوند و اگر در رژیم سینوسی باشیم از فازور استفاده می‌کنیم.

۲) $t = t_0$ در معادلات بخش قبل با قرار دادن $t = t_0$ شرایط اولیه را برای مرحله بعد به دست می‌آوریم.

۳) $t > t_0$ با استفاده از تبدیل لاپلاس، معادلات حاکم بر مدار را به دست می‌آوریم.

حل مثال) $t \leq t_0$

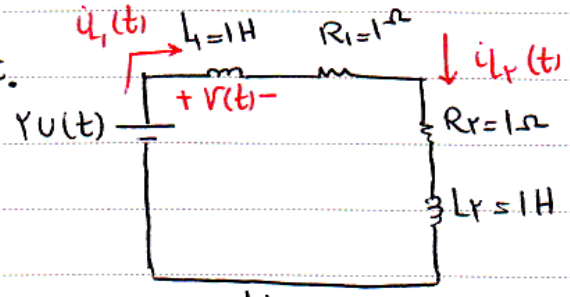


$$i_{L_1}(t) = \frac{2}{R_1} = \frac{2}{1} = 2A \quad , \quad i_{L_2}(t) = 0 \quad , \quad V(t) = 0$$

اتصال کوتاه

$$t = 0 \longrightarrow \begin{cases} i_{L_1}(0) = 2 \\ i_{L_2}(0) = 0 \end{cases}$$

$t > t_0$



$$KVL: \quad 2u(t) = L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} + R_1 i_{L_1}(t) + R_2 i_{L_2}(t) + L_2 \frac{di_{L_2}}{dt}$$

$$2u(t) = \frac{di_{L_1}(t)}{dt} + i_{L_1}(t) + i_{L_2}(t) + \frac{di_{L_2}(t)}{dt}$$

نکته: اگرچه $i_{L_1}(t) = i_{L_2}(t)$ اما چون شرایط اولیه آن‌ها فرق می‌کند از مساوی قرار دادن آن‌ها قبل از اتصال به حوزه لاپلاس پرهیز می‌کنیم.

WWW.MOHANDESYAR.COM

به حوزه لاپلاس می‌بریم:

$$\frac{2}{s} = s I_{L_1}(s) - \underbrace{i_{L_1}(0^-)}_{2} + I_{L_1}(s) + I_{L_2}(s) + s I_{L_2}(s) - \underbrace{i_{L_2}(0^-)}_{0}$$

$$I_{L_1}(s) = I_{L_2}(s) \triangleq I_L(s)$$

$$\frac{2}{s} = I_L(s)(2s+2) - 2 \longrightarrow \frac{2}{s} + 2 = 2 I_L(s)(s+1)$$

$$\frac{2(s+1)}{s} = 2(s+1) I_L(s) \Longrightarrow I_L(s) = \frac{1}{s}$$

نکته: تا رسیدن به جواب نهایی، استفاده از حوزه لاپلاس را ادامه می‌دهیم.

$$\begin{cases} i_{L_1}(t) = u(t) \\ v(t) = L_1 \dfrac{di_{L_1}(t)}{dt} = 1 \times \dfrac{d}{dt}(u(t)) = \delta(t) \end{cases}$$

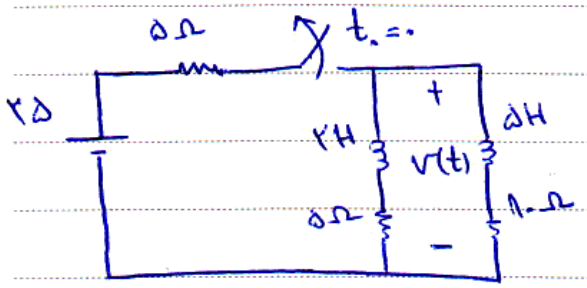
X اشتباه

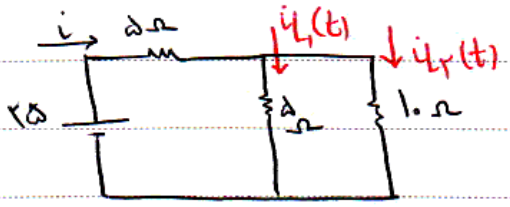
باید:

$$v(t) = L_1 \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \xrightarrow{L} V(s) = L_1\left(s I_L(s) - i_{L_1}(0)\right) = 1 \times \left(s \times \frac{1}{s} - 2\right) = -1$$

$$V(s) = -1 \Longrightarrow \boxed{v(t) = -\delta(t)}$$

مثال) مدار زیر را با استفاده از آنالیز در حوزه لاپلاس تحلیل کرده و $v(t)$ را به دست آورید؟





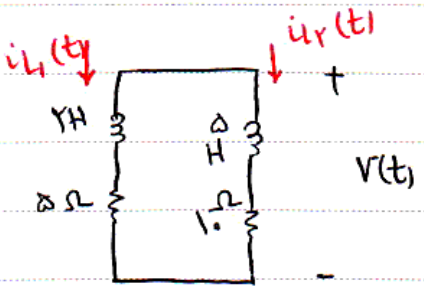
$t \leq 0$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$i = \frac{25}{5 + (5 \| 10)} = 3A \qquad i_{L_1}(t) = 3 \times \frac{10}{15} = 2A \qquad i_{L_2}(t) = 3 \times \frac{5}{15} = 1A$$

$$i_{L_1}(0^-) = 2A \quad , \quad i_{L_2}(0^-) = 1A \qquad t = 0$$

$t > 0$



$$KVL: \; 2\frac{di_{L_1}(t)}{dt} + 5 i_{L_1}(t) - 10\, i_{L_2}(t) - 5\frac{di_{L_2}(t)}{dt} = 0$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} 2\left[s I_{L_1}(s) - i_{L_1}(0^-)\right] + 5 I_{L_1}(s) - 10 I_{L_2}(s) - 5\left[s I_{L_2}(s) - i_{L_2}(0^-)\right] = 0$$

$$i_{L_2}(0^-) = 2 \quad , \quad i_{L_2}(0^-) = 1 \quad , \quad I_{L_2}(s) = -I_{L_1}(s)$$

$$2s I_{L_1}(s) - 4 + 5 I_{L_1}(s) + 10 I_{L_1}(s) + 5s I_{L_1}(s) + 5 = 0$$

$$I_{L_1}(s)\,(2s + 15) = -1 \Rightarrow I_{L_1}(s) = \frac{-1}{2s+15} = \frac{-1/2}{s + \frac{15}{2}}$$

$$\begin{cases} i_{L_1}(t) = \frac{-1}{2} e^{-\frac{15}{2}t}\, u(t) \\ i_{L_2}(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{15}{2}t}\, u(t) \end{cases} \qquad i_{L_1}(0^+) = -\frac{1}{2} \; , \; i_{L_2}(0^+) = \frac{1}{2}$$

دقت کنید که جریان سلف‌ها تغییر ناگهانی داشته ولی ولتاژ دو سر آن‌ها ایجاد ضربه خواهد شد.

$$V(t) = 2\frac{di_{L_1}(t)}{dt} + 5 i_{L_1}(t)$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

دقت کنید که باز هم از $i_{L_1}(t)$ مستقیماً استفاده نکنیم. به جوری لاپلاس می‌زنیم:

$$V(s) = 2\left[s I_{L_1}(s) - i_{L_1}(0^-)\right] + 5 I_{L_1}(s)$$

$$V(s) = (2s+5) I_{L_1}(s) - 4 \longrightarrow V(s) = \frac{-(2s+5)}{7s+15} - 4 = \frac{-25-5-28s-60}{7s+15}$$

$$V(s) = \frac{-30s-65}{7s+15}$$

حال لاپلاس معکوس می‌گیریم:

$$F(s) = \frac{-30}{7s+15} = \frac{-30/7}{s+15/7} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\frac{-30}{7} e^{-\frac{15}{7}t} u(t) = f(t)$$

از خواص داشتیم که:

$$sF(s) - f(0^-) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{df(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow sF(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{df(t)}{dt} + f(0^-)$$

$$\frac{-30s}{7s+15} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{d}{dt}\left(\frac{-30}{7} e^{-\frac{15}{7}t} u(t)\right) - \frac{30}{7} e^{-\frac{15}{7}\times 0} u(0^-) =$$

$$\frac{-30}{7} \times \left(-\frac{15}{7}\right) e^{-\frac{15}{7}t} u(t) \underbrace{- \frac{30}{7} e^{-\frac{15}{7}t} \delta(t)}_{-\frac{30}{7}\delta(t)}$$

$$* \; f(t)\,\delta(t-T_0) = f(T_0)\,\delta(t-T_0)$$

$$\begin{cases} -\dfrac{30s}{7s+15} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dfrac{450}{49} e^{-\frac{15}{7}t} u(t) - \dfrac{30}{7}\delta(t) \\[2ex] \dfrac{-65}{7s+15} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dfrac{-65}{7} e^{-\frac{15}{7}t} u(t) \end{cases}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$v(t) = \frac{450}{49} e^{-\frac{15}{7}t} u(t) - \frac{30}{7}\delta(t) - \frac{95}{7} e^{-\frac{15}{7}t} u(t)$$

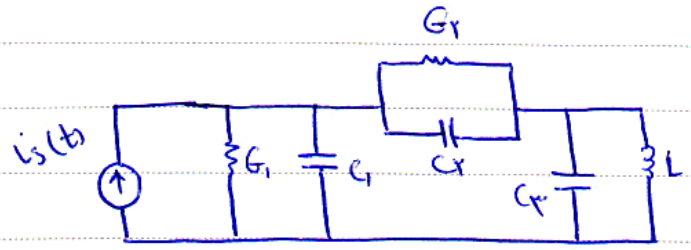
$$v(t) = \frac{-30}{7}\delta(t) - \frac{5}{49} e^{-\frac{15}{7}t} u(t) \Rightarrow$$ $v(t)$ دارای ضربه است.

تنظیم کردن معادلات جبر خطی:

هدف انتقال معادلات حوزه‌ی انتگرال-دیفرانسیل به حوزه‌ی لاپلاس است.

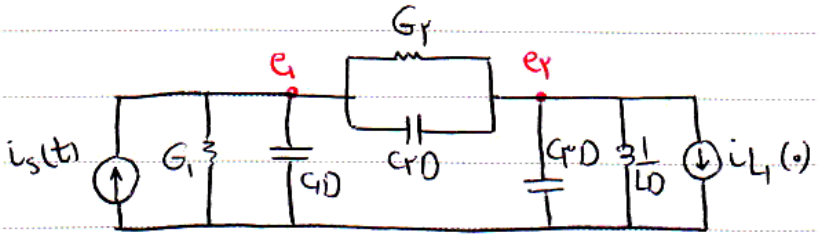
با یک مثال، مسأله را بررسی می‌کنیم.

مثال) معادلات انتگرال-دیفرانسیل مدار زیر را در حوزه‌ی انتگرال-دیفرانسیل به روش گره به دست آورید.



$v_{C_1}(0)$, $v_{C_2}(0)$, $v_{C_3}(0)$, $i_L(0)$

حوزه‌ی انتگرال-دیفرانسیل



از روش میانبر:

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+C_1D+C_2D & -G_2-C_2D \\ -G_2-C_2D & G_2+C_2D+C_3D+\frac{1}{LD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_s(t) \\ -i_{L_1}(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} Df(t) \xrightarrow{L} sF(s) - f(0^-) \\ \frac{1}{D}f(t) \xrightarrow{L} \frac{F(s)}{s} \end{cases}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\begin{cases} G_1 e_1 + G_2 e_1 + C_1 D e_1 + C_2 D e_1 - G_2 e_2 - C_2 D e_2 = i_s(t) \\ -G_2 e_1 - C_2 D e_1 + G_2 e_2 + C_2 D e_2 + C_3 D e_2 + \frac{1}{LD} e_2 = -i_{L_1}(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (G_1+G_2) e_1 + (C_1+C_2) D e_1 - G_2 e_2 - C_2 D e_2 = i_s(t) \\ -G_2 e_1 - C_2 D e_1 + G_2 e_2 + (C_2+C_3) D e_2 + \frac{1}{LD} e_2 = -i_{L_1}(0) \end{cases}$$

با استفاده به جدول لاپلاس :

$$(G_1+G_2)E_1(s) + (C_1+C_2)\left[sE_1(s) - e_1(0^-)\right] - G_2 E_2(s)$$

$$-C_2\left[sE_2(s) - e_2(0^-)\right] = I_s(s)$$

$$\xrightarrow{①} \boxed{E_1(s)\left(G_1+G_2+C_1 s+C_2 s\right) + E_2(s)\left(-G_2 - C_2 s\right) = I_s(s) + C_1 \underbrace{e_1(0^-)}_{V_{C_1}(0^-)} + C_2\underbrace{\left(e_1(0^-) - e_2(0^-)\right)}_{V_{C_2}(0^-)}}$$

$$-G_2 E_1(s) - C_2\left[sE_1(s) - e_1(0^-)\right] + G_2 E_2(s) + (C_2+C_3)\left[sE_2(s) - e_2(0^-)\right] + \frac{1}{Ls}E_2(s)$$

$$= -\frac{i_{L_1}(0)}{s}$$

$$② \boxed{E_1(s)\left(-G_2 - C_2 s\right) + E_2(s)\left(G_2 + C_2 s + C_3 s + \frac{1}{Ls}\right) = -\frac{i_L(0)}{s} - C_2 \underbrace{e_1(0^-)}_{V_{C_1}(0^-)} + C_2 \underbrace{e_2(0^-)}_{V_{C_2}(0^-)} + C_3 \underbrace{e_2(0^-)}_{V_{C_3}(0^-)}}$$

معادلات را به صورت ماتریسی می‌نویسیم :

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+C_1 s+C_2 s & -G_2 - C_2 s \\ -G_2 - C_2 s & G_2 + C_2 s + C_3 s + \frac{1}{Ls} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} =$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

بردار شرایط اولیه

$$\begin{bmatrix} I_s(s) \\ -\dfrac{i_L(0^-)}{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 e_1(0^-) + C_2\left(e_1(0^-) - e_2(0^-)\right) \\ C_1 v_{C_1}(0^-) + C_2 v_{C_2}(0^-) \\ -C_2 e_1(0^-) + C_2 e_2(0^-) + C_3 e_2(0^-) \\ -C_2 v_{C_1}(0^-) + C_2 v_{C_3}(0^-) + C_3 v_{C_3}(0^-) \end{bmatrix}$$

اما برای تشکیل معادلات فوق راه حل مستقیمی به صورت زیر وجود دارد:

خوزه‌ی انتگرال دیفرانسیل

روش گره $\quad Y_n \cdot e = i_s \xrightarrow{L} Y_n(s)\ E(s) = I_s(s) + \alpha$ بردار شرایط اولیه

روش مش $\quad Z_m \cdot i = e_s \xrightarrow{L} Z_m(s) \cdot I(s) = E_s(s) + \alpha$

روش حلقه‌ی اساسی $\quad Z_B \cdot i = e_s \xrightarrow{L} Z_B(s) \cdot I(s) = E_s(s) + \alpha$

روش کات ست اساسی $\quad Y_Q \cdot e = i_s \xrightarrow{L} Y_Q(s) \cdot E(s) = I_s(s) + \alpha$

در روش‌های گره و کات ست اساسی، بردار شرایط اولیه شامل ولتاژ اولیه‌ی خازن‌ها است.

در روش‌های مش و حلقه‌ی اساسی، بردار شرایط اولیه شامل جریان اولیه سلف‌هاست.

$\frac{1}{D} \to \frac{1}{s}$
$D \to s$

برای تبدیل معادلات انتگرال دیفرانسیل به حوزه‌ی لاپلاس در طرف چپ معادلات اول اینکه D ها را به s تبدیل می‌کنیم و هر جا D داریم ($\frac{1}{D}$ نه) با همان علامت و همان ضریب، شرایط اولیه را در بردار α جمع می‌کنیم.

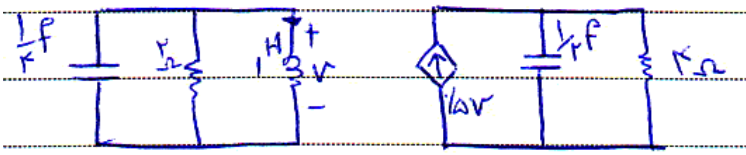
فرض کنید معادلات انتگرال - دیفرانسیل یک مدار در آنالیز مش به صورت زیر باشد:

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\begin{bmatrix} 2D+\frac{1}{D} & -D & 3 \\ -D & 3D+2 & D \\ 3 & D & 5D+\frac{1}{D} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u(t) \\ 0 \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

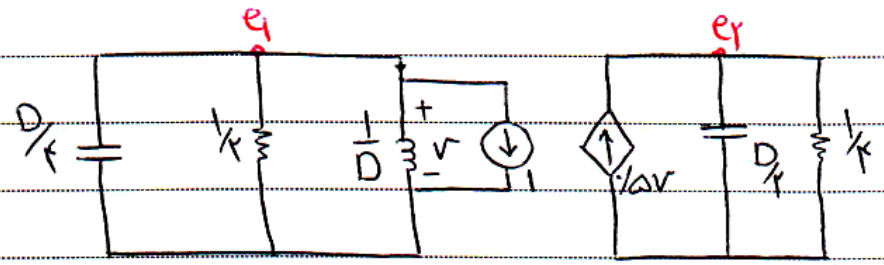
$$\begin{bmatrix} 2s+\frac{1}{s} & -s & 3 \\ -s & 3s+2 & s \\ 3 & s & 5s+\frac{1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} 2i_1(0^-)-i_2(0^-) \\ -i_1(0^-)+3i_2(0^-)+i_3(0^-) \\ i_2(0^-)+5i_3(0^-) \end{bmatrix}}_{\alpha}$$

مثال) در مدار زیر مقدار V را بدست آورید؟ (در حوزه لاپلاس)



$i_L(0^-)=1A \qquad V_{C_1}(0^-)=2V \qquad V_{C_2}(0^-)=1V$

ابتدا معادلات انتگرال دیفرانسیل را در یکی از روش ها مثلا گره می نویسیم.



$$\begin{bmatrix} \frac{D}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{D} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{D}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1/5\, e_1 \end{bmatrix}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\begin{bmatrix} \frac{s}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{s} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4}+\frac{s}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e_1(0^-) \\ \frac{1}{2}e_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$V_{C_1}(0^-)=2$

$V_{C_2}(0^-)=1$

$$\begin{bmatrix} \frac{s^2+2s+4}{4s} & 0 \\ -1/2 & \frac{2s+1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s-2}{2s} \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$E_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s-2}{2s} & 0 \\ 1/2 & \frac{2s+1}{4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{s^2+2s+4}{4s} & 0 \\ -1/2 & \frac{2s+1}{4} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{(s-2)(2s+1)}{8s}}{\frac{(s^2+2s+4)(2s+1)}{16s}}$$

$$E_1(s) = \frac{2s-4}{s^2+2s+4}$$

$$P_1, P_2 = -1 \pm j\sqrt{3} \qquad E_1(s) = \frac{k}{(s-(-1+j\sqrt{3}))} + \frac{k^*}{(s-(-1-j\sqrt{3}))}$$

$$k = (s-(-1+j\sqrt{3}))\, E_1(s)\Big|_{s=-1+j\sqrt{3}} = \frac{2s-4}{s+1+j\sqrt{3}}\Bigg|_{s=-1+j\sqrt{3}} = \frac{-2+2j\sqrt{3}-4}{2j\sqrt{3}} = \frac{-3+j\sqrt{3}}{j\sqrt{3}}$$

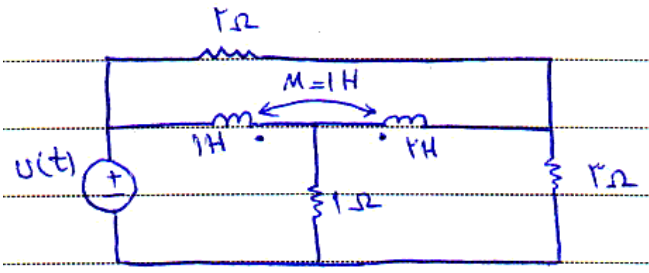
$$= \frac{2\sqrt{3}\angle 150}{\sqrt{3}\angle 90} = 2\angle 60 \quad \begin{cases} |k| = 2 \\ \angle k = 60 \end{cases}$$

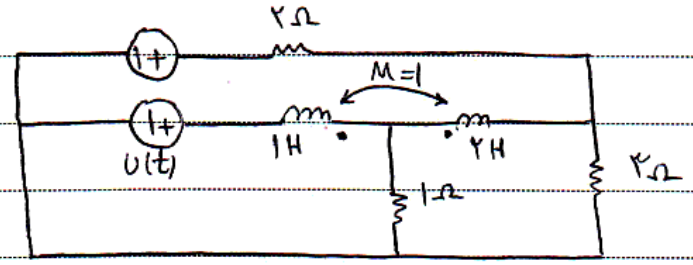
$$v(t) = 2|k|e^{\alpha t}\cos(\beta t + \angle k)$$

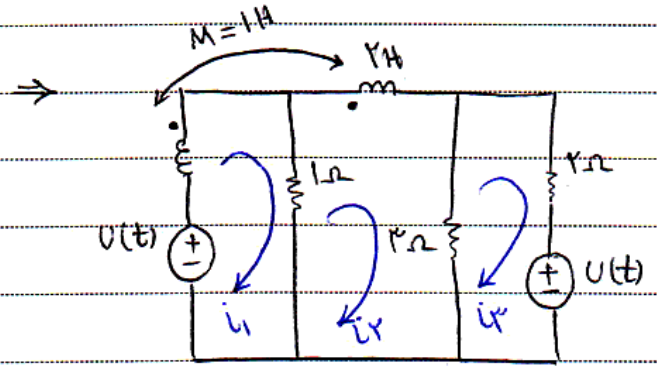
$$= 4e^{-t}\cos(\sqrt{3}t + 60)$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

مثال) با استفاده از روش لاپلاس، مدار زیر را آنالیز کنید؟

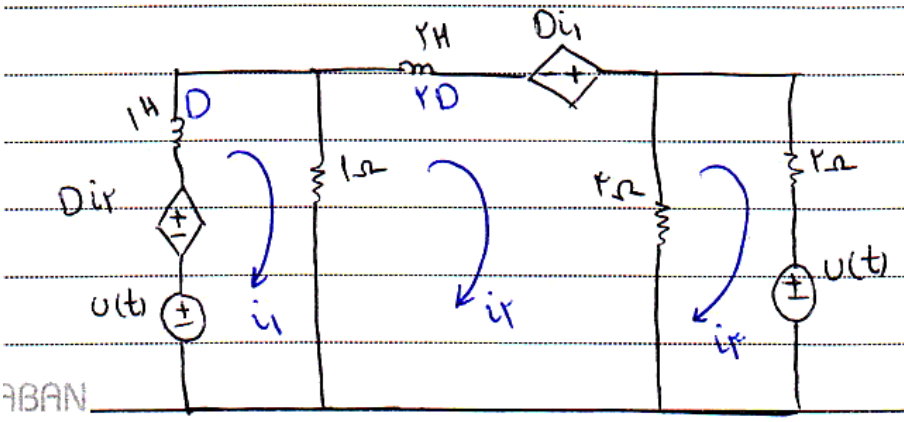




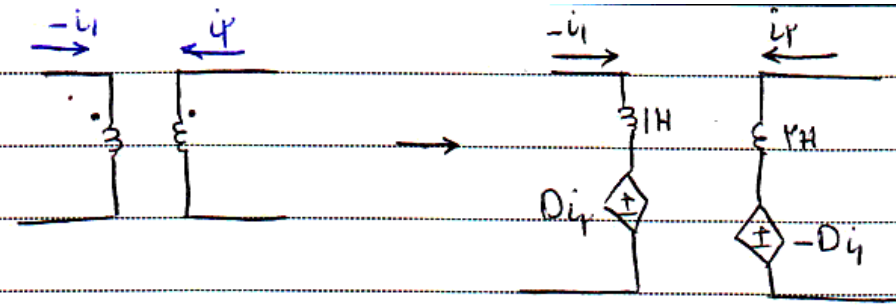


روش مش را استفاده می‌کنیم.

برای استفاده از روش میانبر از مدار معادل سلف‌های تزویج شده استفاده می‌کنیم.



WWW.MOHANDESYAR.COM



$$\begin{bmatrix} D+1 & -1-D & 0 \\ -1-D & 2D+4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t)+Di_2 \\ Di_1 \\ -v(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1-s & 0 \\ -1-s & 2s+4 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s}+i_1(0^-)-i_2(0^-) \\ -i_1(0^-)+2i_2(0^-) \\ -\frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$i_{L_1}(0^-)$ $i_{L_2}(0^-)$

معادلات حالت و پاسخ لاپلاس:

در معادلات حالت داشتیم:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$\xrightarrow{L} sX(s) - x(0^-) = AX(s) + BU(s)$$

$$X(s)(sI - A) = +BU(s) + x(0) \Rightarrow \boxed{X(s) = (sI - A)^{-1}\left[BU(s) + x(0)\right]}$$

پاسخ حالت صفر $X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$

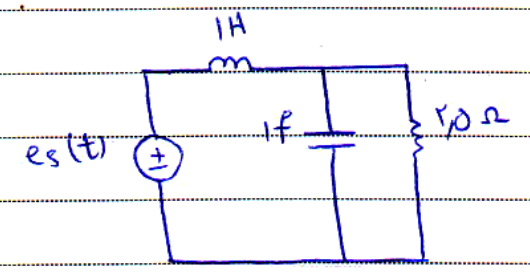
پاسخ ورودی صفر $X(s) = (sI - A)^{-1} x(0^-)$

WWW.MOHANDESYAR.COM

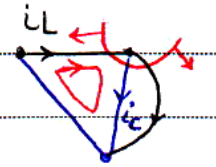
Subject:
Year. Month. Date. ( )

* پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار همان پاسخ حالت صفر است.

مثال) با استفاده از معادلات حالت، پاسخ پله و پاسخ ضربه مدار زیر را بدست آورید؟



گراف:



$$KCL: \quad C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{2.5} - i_L = 0$$

$$\dot{v}_c = -\frac{1}{2.5}v_c + i_L$$

$$KVL: \quad L\frac{di_L}{dt} + v_c - e_s = 0 \Rightarrow \dot{i}_L = -v_c + e_s$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-1}{2.5} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} e_s$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-1}{2.5} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2.5s+1}{2.5} & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

ماتریس

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\frac{2.5s^2+s+2.5}{2.5}} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & \frac{2.5s+1}{2.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2.5s}{2.5s^2+s+2.5} & \frac{2.5}{2.5s^2+s+2.5} \\ \frac{-2.5}{2.5s^2+s+2.5} & \frac{6.25}{(2.5s+1)(2.5s^2+s+2.5)} \end{bmatrix}$$

پاسخ ضربه $\quad e_s(t) = \delta(t) \longrightarrow E_s(s) = 1$

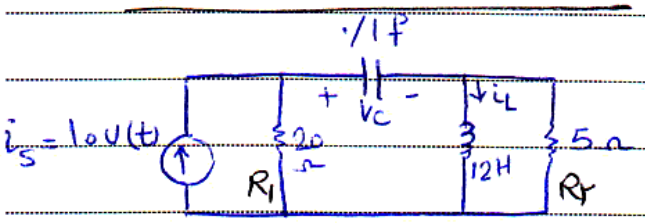
TARAN

WWW.MOHANDESYAR.COM

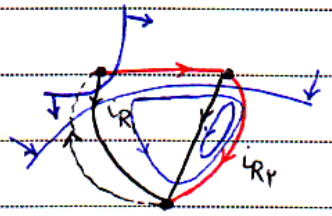
$$x(s) = \begin{bmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} = \left[(sI - A)^{-1}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times 1$$

(پاسخ حالت صفر)

مثال) در مدار زیر، معادلات حالت را به دست آورید سپس پاسخ به ورودی را تحت شرایط اولیه صفر محاسبه کنید؟



گراف:



KCL: $0/1 \dfrac{dV_C}{dt} + i_{R_1} - \overset{i_s}{10u(t)} = 0 \longrightarrow \boxed{\dfrac{dV_C}{dt} = -10\, \overset{\text{غیرحالت}}{i_{R_1}} + 10 i_s}$ (1)

KVL: $0/2 \dfrac{di_L}{dt} = 5 i_{R_2} \longrightarrow \boxed{\dfrac{di_L}{dt} = 25\, \overset{\text{غیرحالت}}{i_{R_2}}}$ (2)

KVL: $20 i_{R_1} - 5 i_{R_2} - V_C = 0 \Longrightarrow \boxed{i_{R_1} = \dfrac{1}{4} i_{R_2} + \dfrac{1}{20} V_C}$ (A) ; i_{R_1} رفع غیرحالت

$$\boxed{\dot{V}_C = \frac{-10}{4}\, \overset{\text{غیرحالت}}{i_{R_2}} - \frac{1}{2} V_C + 10 i_s} \quad (3)$$

در (1) و (A) ;

KCL: $i_{R_2} + i_L + i_{R_1} - i_s = 0$; i_{R_2} رفع غیرحالت

$$i_{R_2} = -i_L - i_{R_1} + i_s$$

$$i_{R_2} = -i_L - \frac{1}{4} i_{R_2} - \frac{1}{20} V_C + i_s$$

(A) را در معادله بالا می‌گذاریم.

TABAN

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$\frac{5}{4} i_{R_2} = -i_L - \frac{1}{20} V_C + i_S$$

$$i_{R_2} = -\frac{4}{5} i_L - \frac{1}{25} V_C + \frac{4}{5} i_S \quad (B)$$

(B) را در (2) و (3) قرار می‌دهیم تا معادلات حالت تولید شود.

در (B) و (2): $\dot{i}_L = -20 i_L - V_C + 20 i_S$ معادله حالت

در (B) و (3): $\dot{V}_C = 2 i_L + 0.1 V_C - 2 i_S - \frac{1}{2} V_C + 10 i_S$

$\dot{V}_C = 2 i_L - 0.4 V_C + 8 i_S$ معادله حالت

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L \\ \dot{V}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -1 \\ 2 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} i_S$$

محاسبه روابط i_L و V_C:

یک راه استفاده از معادلات انتگرال دیفرانسیل در هر یک از ۴ روش موجود یا استفاده از معادلات لاپلاس و یک راه استفاده از حوزه لاپلاس با استفاده از ماتریس A است.

داشتیم: $X(s) = (sI - A)^{-1}\left[BU(s) + x(0^-)\right]$

با شرایط اولیه صفر:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) = \begin{bmatrix} s+20 & 1 \\ -2 & s+0.4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ 8 \end{bmatrix} \underbrace{10 \times \frac{1}{s}}_{U(s)}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$X(s) = \frac{1}{(s+20)(s+0.4)+2} \begin{bmatrix} s+0.4 & -1 \\ 2 & s+20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{200}{s} \\ \frac{80}{s} \end{bmatrix}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} I_L(s) \\ V_C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{200s}{s(s^2+20.4s+10)} \\ \frac{80s+2000}{s(s^2+20.4s+10)} \end{bmatrix}$$

$$I_L(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+0.505)} + \frac{K_3}{(s+19.895)}$$

$$K_1 = \left.\frac{200s}{s^2+20.4s+10}\right|_{s=0} = 0$$

$$K_2 = \left.\frac{200s}{s(s+19.895)}\right|_{s=-0.505} = 10.31 \qquad K_3 = \left.\frac{200s}{s(s+0.505)}\right|_{s=-19.895} = -10.31$$

$$\boxed{i_L(t) = 10.31\left(e^{-0.505t} - e^{-19.895t}\right)u(t)}$$

محاسبه V_C به عهده‌ی خودتان

WWW.MOHANDESYAR.COM

فصل ۱۴: فرکانس های طبیعی

سیستمی مانند سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$x(t)=3\cos 3t+e^{-2t}$ → [ ] → $y(t)=\sin 3t+\cos(5t+30)+0.2e^{-2t}+3e^{-4t}$

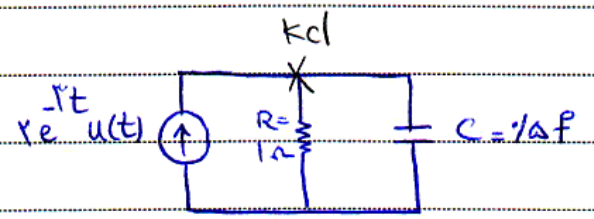
مولفه های $3t$ و $-2t$ که در خروجی ظاهر شده اند ممکن است ناشی از ورودی باشند، اما مولفه های $5t$ و $-4t$ ناشی از طبیعت سیستم در خروجی ظاهر شده است و ارتباطی با ورودی ندارد.

بنابراین با توجه به توضیحات فوق:

نکته: فرکانس های طبیعی دسته پاسخ ورودی صفر سیستم محاسبه می شوند.

یک راه این است که معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار را بنویسیم. ریشه های معادله مشخصه همان فرکانس های طبیعی هستند.

مثال)



$v_c(0)=2V$

می خواهیم پاسخ مدار v_c را بدست آوریم؟

پاسخ مدار v_c:

$$2e^{-3t}=0.5\frac{dv_c}{dt}+\frac{v_c}{1}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

معادله دیفرانسیل مدار:

$$\frac{dv_c}{dt} + 2v_c = 4e^{-3t}$$

پاسخ عمومی $v_c(t) = Ke^{-2t}$

پاسخ خصوصی $v_c(t) = Ae^{-3t} \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} -3Ae^{-3t} + 2Ae^{-3t} = 4e^{-3t} \longrightarrow A = -4$

کامل $v_c(t) = \underset{\text{عمومی}}{v_c(t)} + \underset{\text{خصوصی}}{v_c(t)} \longrightarrow v_c(t) = Ke^{-2t} - 4e^{-3t}$

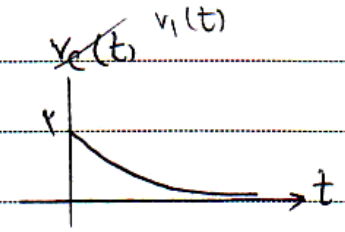
$v_c(0) = 2 \longrightarrow K - 4 = 2 \longrightarrow K = 6$

$$v_c(t) = (6e^{-2t} - 4e^{-3t})\, u(t)$$

با توجه به جواب مساله، $s = -2$ فرکانس طبیعی سیستم است، اما $s = -3$ نباید فرکانس طبیعی باشد زیرا نیروی ورودی باشد. در چنین اگر معادله متناظر را بررسی کنیم:

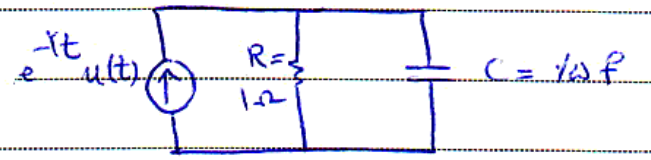
$$\frac{dv_c}{dt} + 2v_c = 0 \longrightarrow s + 2 = 0 \longrightarrow s = -2$$

پس فقط $s = -2$ فرکانس طبیعی سیستم است.



خلاصه:

حال فرض کنید ورودی به صورت زیر باشد و مدار را با فرکانس طبیعی اش تحریک کنیم:



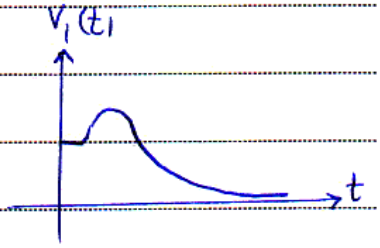
$v_c(0) = 2V$

WWW.MOHANDESYAR.COM

پاسخ کامل V_C:

$$e^{-2t} = \frac{1}{5}\frac{dv_C}{dt} + \frac{V_C}{1}$$

$$\frac{dv_C}{dt} + 2V_C = 2e^{-2t}$$



پاسخ عمومی $V_C(t) = Kte^{-2t}$

پاسخ خصوصی $V_C(t) = Ae^{-2t} \xrightarrow{\text{صدق در معادله}} -2Ae^{-2t} + 4Ae^{-2t} = 2e^{-2t} \longrightarrow A = 1$

کامل $V_C(t) = \underset{\text{عمومی}}{V_C(t)} + \underset{\text{خصوصی}}{V_C(t)} \Rightarrow V_C(t) = kte^{-2t} + e^{-2t} \longrightarrow V_C(t) = e^{-2t}(1+kt)$

مثال) معادله مشخصه یک مدار به صورت زیر است:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 4i_L + 3 = 0$$

$$s^2 + 4s + 3 = 0 \begin{cases} s = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ s = \frac{-4-2}{2} = -3 \end{cases}$$

تا اینجا حذف است.

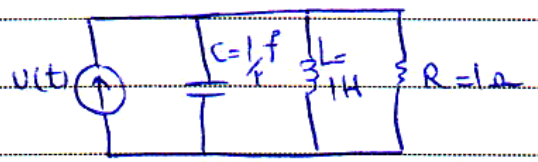
انواع فرکانس های طبیعی

فرکانس های طبیعی متغیر با زمان شبکه

فرکانس های طبیعی کل شبکه

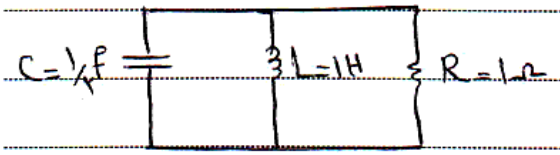
نمی ممکن است یک یا تعدادی از فرکانس های طبیعی کل شبکه در ولتاژ یا جریان یک شاخه ظاهر نشوند.

مثال) فرکانس های طبیعی ولتاژ خازن را به دست آورید؟



WWW.MOHANDESYAR.COM

منبع را می‌کشیم تا مدار در شرایط ورودی صفر قرار گیرد.



$$i_C + i_L + i_R = 0$$

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt + i_L(0) + \frac{v_C}{R} = 0 \longrightarrow$$ معادله مدار

$$C\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{1}{L}v_C + \frac{1}{R}\frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$\times 4 \quad \frac{d^2v_C}{dt^2} + v_C + \frac{dv_C}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + 2\frac{dv_C}{dt} + 2v_C = 0 \longrightarrow s^2 + 2s + 2 = 0$$ معادله مشخصه

$$s_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4j^2}}{2} \begin{cases} -1+j \\ -1-j \end{cases}$$ فرکانس‌های طبیعی

می‌توان نشان داد که مشخصه‌های تابع تبدیل در حوزه لاپلاس همان فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند.

و اسم به: $$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C\,dt + i_L(0) + \frac{v_C}{R} = 0$$

$$\frac{dv_C}{dt} + 2\int v_C\,dt + 2v_C + 2i_L(0) = 0 \xrightarrow{L} sV_C(s) - v_C(0) + \frac{2}{s}V_C(s) + 2V_C(s) + \frac{2i_L(0)}{s} = 0$$

$$V_C(s)\left(s + \frac{2}{s} + 2\right) = v_C(0) - \frac{2}{s}i_L(0)$$

$$V_C(s) = \frac{v_C(0) - 2/s\, i_L(0)}{s + \frac{2}{s} + 2}$$

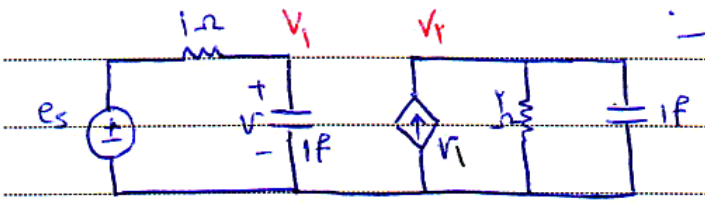
WWW.MOHANDESYAR.COM

$$V_C(s) = \frac{sV_C(0^-) - 2i_L(0^-)}{s^2+2s+2}$$

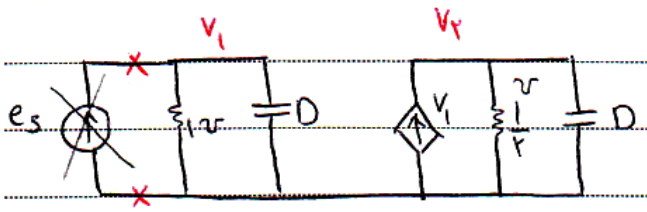
قطب‌ها $\begin{cases} s=-1+j \\ s=-1-j \end{cases}$

یعنی:

مثال ۲) فرکانس‌های طبیعی V_1 و V_2 را بدست آورید؟



در حالت گذرا صفر، مدار را از راه گره تحلیل می‌کنیم:



$$\begin{bmatrix} D+1 & 0 \\ 0 & -1 \quad D+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(0^-) \\ V_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$V_{C_1}(0^-)$

$V_{C_2}(0^-)$

$$V_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} V_1(0^-) & 0 \\ V_2(0^-) & s+\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} = \frac{V_1(0^-)(s+\frac{1}{2})}{(s+1)(s+\frac{1}{2})}$$

$$V_1(s) = \frac{V_1(0^-)}{s+1} \xrightarrow{\text{فرکانس طبیعی}} \boxed{s=-1}$$

$$V_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+1 & V_1(0^-) \\ -1 & V_2(0^-) \end{vmatrix}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})} \Longrightarrow \boxed{V_2(s) = \frac{V_2(0^-)(s+1)+V_1(0^-)}{(s+1)(s+\frac{1}{2})}}$$

فرکانس‌های طبیعی $\begin{cases} s=-1 \\ s=-\frac{1}{2} \end{cases}$

TABAN

WWW.MOHANDESYAR.COM

$s=-1$ و $s=-\frac{1}{2}$ جزء کانس طبیعی هاری مدار نمودی $s=-\frac{1}{2}$ در کسیت V_1 ظاهر نشده.

مثال) در مثال قبل پاسخ حدودی مدار زیر را بدست آورید؟

$$\begin{cases} e_s(t)=u(t) \\ e_s(t)=e^{-t}u(t) \end{cases}$$

شرایط اولیه: $V_{C_1}(0^-)=V_{C_2}(0^-)=1$

$$\begin{bmatrix} D+1 & 0 \\ 0-1 & D+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ V_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ -1 & s+\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \overset{1}{V_{C_1}(0^-)}+E_s \\ \overset{1}{V_{C_2}(0^-)} \end{bmatrix}$$

$$V_1(s)=\frac{\begin{vmatrix} 1+E_s & 0 \\ 1 & s+\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})}=\frac{(1+E_s)(s+\frac{1}{2})}{(s+1)(s+\frac{1}{2})}=\frac{1+E_s}{(s+1)}$$

$$V_2(s)=\frac{\begin{vmatrix} s+1 & 1+E_s \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})}=\frac{s+2+E_s}{(s+1)(s+\frac{1}{2})}$$

الف) $E_s=\frac{1}{s}$

$$V_1(s)=\frac{1+\frac{1}{s}}{s+1}=\frac{\frac{s+1}{s}}{s+1}=\frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_1(t)=u(t)}$$

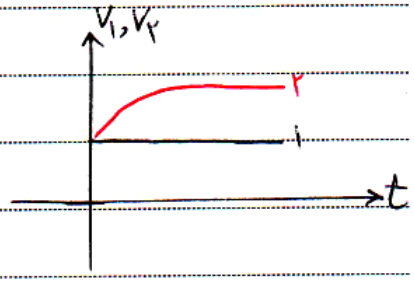
$$V_2(s)=\frac{s+2+\frac{1}{s}}{(s+1)(s+\frac{1}{2})}=\frac{s+1}{s\quad(s+\frac{1}{2})}=\frac{k_1}{s}+\frac{k_2}{s+\frac{1}{2}}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$K_1 = \left.\frac{s+1}{s+1/2}\right|_{s=0} = 2$$

$$K_2 = \left.\frac{s+1}{s}\right|_{s=-1/2} = -1$$

$$V_2(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1/2} \longrightarrow \boxed{v_2(t) = (2 - e^{-1/2 t})\,u(t)}$$



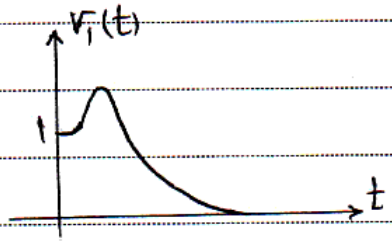
ب) $E_s = \frac{1}{(s+1)}$: این ورودی، پاسخ طبیعی مدار را تحریک می‌کند.

$$V_1(s) = \frac{1 + \frac{1}{s+1}}{s+1} = \frac{s+2}{(s+1)^2}$$

$$V_1(s) = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2}$$

$$K_{12} = (s+2)\Big|_{s=-1} = 1 \qquad K_{11} = \frac{d}{ds}\Big[(s+2)\Big]_{s=-1} = 1$$

$$\boxed{v_1(t) = (e^{-t} + t e^{-t})\,u(t)} \Longrightarrow \boxed{v_1(t) = e^{-t}(1+t)\,u(t)}$$



$$V_2(s) = \frac{(s+2) + \frac{1}{s+1}}{(s+1)(s+1/2)} = \frac{\frac{s^2+3s+3}{s+1}}{(s+1)(s+1/2)}$$

$$V_2(s) = \frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2(s+1/2)} = \frac{K_{11}}{s+1} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_2}{s+1/2}$$

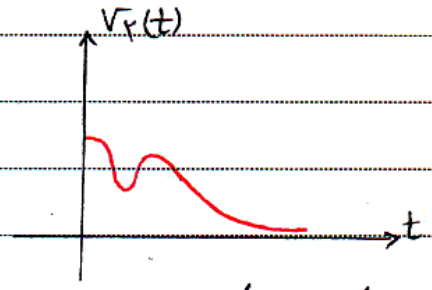
$$K_{12} = \left.\frac{s^2+3s+3}{s+1/2}\right|_{s=-1} = \frac{1-3+3}{-1/2} = -2$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$K_{11} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+3s+3}{s+1/2}\right]_{s=-1} = \left[\frac{(2s+3)(s+1/2) - s^2-3s-3}{(s+1/2)^2}\right]_{s=-1} = \frac{1\times(-1/2)-1+3-3}{1/4} = -6$$

$$K_2 = \frac{s^2+3s+3}{(s+1)^2}\Big|_{s=-1/2} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+3}{\frac{1}{4}} = 7$$

$$v_{c2}(t) = \left(-6e^{-t} - 2te^{-t} + 7e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$$



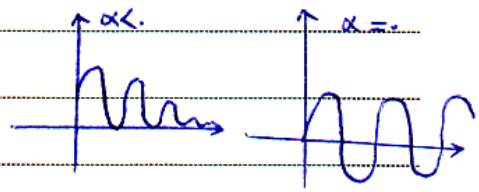
حالت‌های ممکن در فرکانس‌های طبیعی :

$$f(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + K_3 e^{s_3 t} + \dots$$

۱) اگر حقیقی باشند دارای علامت منفی و اگر مختلط باشند مزدوج با قسمت حقیقی منفی‌اند. فرکانس‌های طبیعی مختلط به صورت نوسان در خروجی ظاهر می‌شوند. (به صورت Cos و Sin)

$$s_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

$$f(t) = e^{(\alpha+j\omega)t} + e^{(\alpha-j\omega)t} = e^{\alpha t}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$



$$f(t) = 2e^{\alpha t}\cos\omega t$$

α : قسمت حقیقی (ضریب میرایی)

ω : قسمت موهومی فرکانس طبیعی (فرکانس نوسان)

۲) هرگاه، تغییر شکل مورد نظر جریان یک سلف باشد و این سلف در حلقه‌ای قرار گرفته باشد، این حلقه فقط از تعدادی سلف تشکیل شده، چون سلف‌ها ایده‌آل فرض می‌شوند ممکن است جریان ثابت I_0 در آن باقی بماند، یعنی :

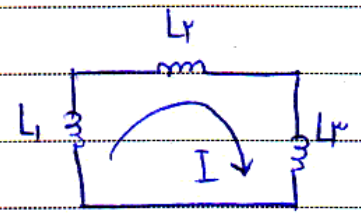
$$\frac{I_0}{s} \xrightarrow{L^{-1}} I_0 e^{0t} u(t)$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

به ازای هر حلقه‌ی سلفی، یک فرکانس طبیعی صفر خواهیم داشت.

بنابراین $s=0$ فرکانس طبیعی جریان سلف خواهد بود.

مثال)



$$KVL:\ L_1\frac{dI_{L_1}}{dt}+L_2\frac{dI_{L_2}}{dt}+L_3\frac{dI_{L_3}}{dt}=0$$

$$L_1\left(sI_{L_1}(s)-I_{L_1}(0^-)\right)+L_2\left(sI_{L_2}(s)-I_{L_2}(0^-)\right)+L_3\left(sI_{L_3}(s)-I_{L_3}(0^-)\right)=0$$

$$I_{L_1}(s)=I_{L_2}(s)=I_{L_3}(s)\triangleq I_L(s)$$

$$I_L(s)=\underbrace{+\frac{L_1I_{L_1}(0^-)+L_2I_{L_2}(0^-)+L_3I_{L_3}(0^-)}{s(L_1+L_2+L_3)}}_{I_0}=\frac{I_0}{s}$$

اگر $s=0$ فرکانس طبیعی جریان سلف باشد فرکانس طبیعی ولتاژ سلف نیز خواهد بود.

$$V_L(t)=L\frac{dI_L(t)}{dt}\longrightarrow V_L(s)=L\left(s\underbrace{I_L(s)}_{\frac{I_0}{s}}-i_L(0^-)\right)$$

۳) هرگاه متغیر شکل موج ولتاژ یک خازن باشد این خازن فقط رطوبت سمی که از خازن تشکیل شده قرار داشته باشد چون خازن‌ها ایده‌آل فرض می‌شوند ممکن است ولتاژ ثابت V_0 در دو سر آن‌ها باقی بماند.

در این صورت:

$$V(s)=\frac{V_0}{s}\xrightarrow{L^{-1}}V_0e^{0t}u(t)$$

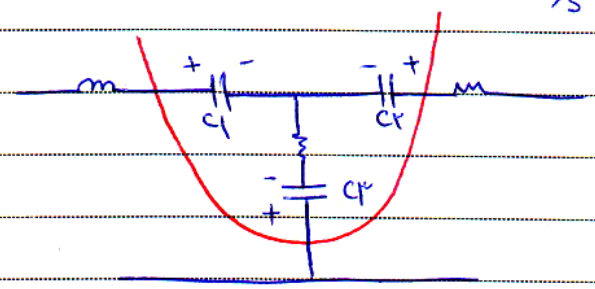
WWW.MOHANDESYAR.COM

$i_C = C\frac{dv}{dt} \xrightarrow{L}$ * اگر $S=0$ فرکانس ضعیف ولتاژ خازن باشد، فرکانس ضعیف جریان خازن خواهد بود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$I_C(S) = C\underbrace{S V_C(S)}_{1/S} - C V_C(0^-) = C\left(1 - V_C(0^-)\right)$$

و $S=0$ فرکانس ضعیف ولتاژ خازن خواهد بود.

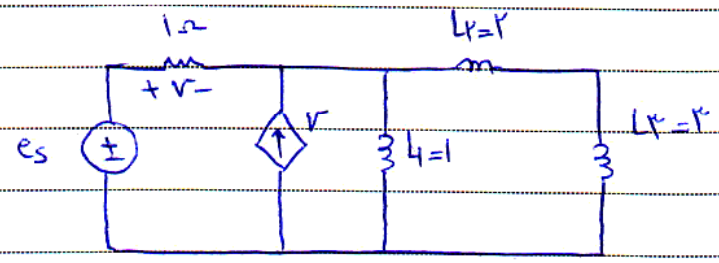


✓ به کمک حلقه‌های سلفی و خازنی سمت‌های خازنی فرکانس ضعیف صفر داریم

$$C_1\frac{dv_{C_1}}{dt} + C_2\frac{dv_{C_2}}{dt} + C_3\frac{dv_{C_3}}{dt} = 0$$

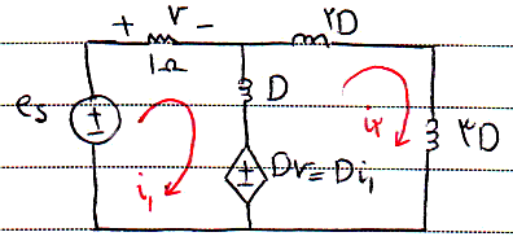
$$C_1 S V_{C_1}(S) - C_1 V_{C_1}(0) + C_2 S V_{C_2}(S) - C_2 V_{C_2}(0^-) + C_3 S V_{C_3}(S) - C_3 V_{C_3}(0^-) = 0$$

مثال) فرکانس ضعیف جریان سلف‌ها را بدست آورید؟

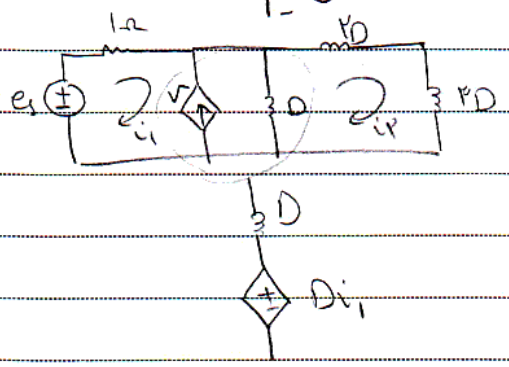


$I_{L_1}(0^-) = 1$

$I_{L_2}(0^-) = I_{L_3}(0^-) = 3$



از روش مش حل می‌کنیم:



$v = 1 \times i_1 = i_1$

$$\begin{bmatrix} D+1+D & -D \\ -D-D & 4D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s - \cancel{Di_1} \\ \cancel{Di_1} \end{bmatrix}$$

$I_{L_1}(0^-) + I_{L_2}(0^-) + I_{L_3}(0^-) = 5$

$$\begin{bmatrix} 2S+1 & -S \\ -2S & 4S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1(S) \\ I_2(S) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s + 2i_1(0^-) - i_2(0^-) \\ -2i_1(0^-) + 4i_2(0^-) \end{bmatrix}$$

$-2I_{L_1}(0^-) - 2I_{L_2}(0^-) + 4I_{L_2}(0^-) = 10$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$i_1(0^-) - i_2(0^-) = I_{L_1}(0^-)$$

$$\longrightarrow \quad i_1(0^-) = I_{L_1}(0^-) + I_{L_2}(0^-)$$

$$i_2(0^-) = I_{L_2}(0^-) = I_{L_3}(0^-)$$

$$\begin{bmatrix} 2s+1 & -s \\ -2s & 6s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Es+5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} Es+5 & -s \\ 10 & 6s \end{vmatrix}}{(2s+1)6s - 2s^2} = \frac{6s(Es+5)+10s}{12s^2+6s-2s^2}$$

$$\boxed{I_1(s) = \frac{6s(Es+5)+10s}{s(10s+6)}}$$

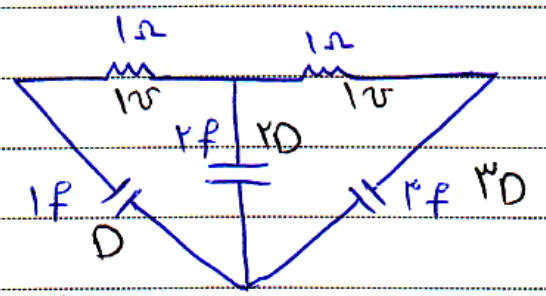
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2s+1 & Es+5 \\ -2s & 10 \end{vmatrix}}{(2s+1)6s - 2s^2} = \frac{10(2s+1)+2s(Es+5)}{s(10s+6)}$$

$$I_{L_1}(s) = I_1(s) - I_2(s) = \frac{\bigcirc}{s(10s+6)}$$

$$I_{L_2}(s) = I_{L_3}(s) = \frac{10(2s+1)+2s(Es+5)}{s(10s+6)}$$

فرکانس طبیعی جریان سلف‌ها $s=0$, $s=\frac{-6}{10}$ است.

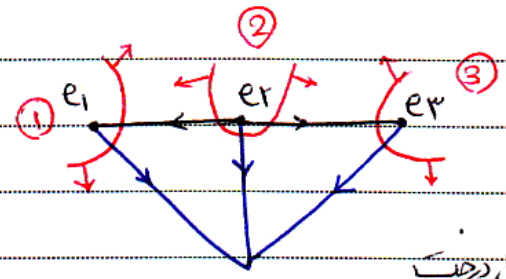
مثال) فرکانس طبیعی ولتاژ خازن‌ها را بدست آورید؟



از روش میانبر کات ست استفاده می‌کنیم.

WWW.MOHANDESYAR.COM

مدار خود در شرایط ورودی صفر است. (ورودی نداریم.)



بردار ولتاژ شاخه‌های درخت

$$\begin{bmatrix} D+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2D+2 & -1 \\ 0 & -1 & 3D+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2s+2 & -1 \\ 0 & -1 & 3s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{C_1}(0^-) \\ 2V_{C_2}(0^-) \\ 3V_{C_3}(0^-) \end{bmatrix}$$

صورت کسر = A

$$E_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_{C_1}(0^-) & -1 & 0 \\ 2V_{C_2}(0^-) & 2(s+1) & -1 \\ 3V_{C_3}(0^-) & -1 & (3s+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ -1 & 2(s+1) & -1 \\ 0 & -1 & 3s+1 \end{vmatrix}} = \frac{V_{C_1}(0^-)\left[2(s+1)(3s+1)-1\right] + \left(2V_{C_2}(0^-)(3s+1) + 3V_{C_3}(0^-)\right)}{s+1\left[2(s+1)(3s+1)-1\right] - (-1)\times(-3s-1)}$$

$$= \frac{A}{2(s+1)^2(3s+1)-(s+1)-3s-1} = \frac{A}{2(s+1)^2(3s+1)-4s-2} =$$

$$\frac{A}{(2s^2+4s+2)(3s+1)-4s-2} = \frac{A}{6s^3+2s^2+12s^2+4s+6s+2-4s-2}$$

$$= \frac{A}{6s^3+14s^2+6s} = \frac{A}{s(6s^2+14s+6)}$$

$s=0$ ریشه صفر ولتاژ خازن C_1 است یعنی ولتاژ مقدار نهایی‌اش یک مقدار ثابت خواهد بود.

TARAN

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$e_1(\infty) = \lim_{s \to 0} sE_1(s) = \frac{v_{c1}(0^-) + 2v_{c2}(0^-) + 3v_{c3}(0^-)}{6}$$

e_2 و e_3 به عهده خودتان.

فرکانس های طبیعی کل مدار: (فرکانس های طبیعی موجود در شبکه)

فرکانس های طبیعی شبکه، اجتماع تمام فرکانس های طبیعی شاخه ها می باشد. ثابت می شود برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی شبکه لازم نیست که فرکانس های طبیعی تمام شاخه ها را به دست آوریم، زیرا اگر $s \neq 0$ فرکانس طبیعی جریان شاخه باشد، فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه هم خواهد بود.

۱) شاخه مقاومت باشد.

$$j_k = I e^{st}$$

$$v_k = R j_k = \overset{v}{(RI)} e^{st} = v e^{st}$$

۲) شاخه سلف باشد.

$$v_k = L \frac{dj_k}{dt} = L \frac{d}{dt}\left[I e^{st}\right] = \overset{v}{(LIs)} e^{st} = v e^{st}$$

۳) شاخه خازن باشد.

$$v_k = \frac{1}{C}\int j_k \, dt + v_c(0^-) = \frac{1}{C}\int_0^t I e^{st} dt + v_c(0^-)$$

$$= \overset{v}{\left(\frac{I}{C} \times \frac{1}{s}\right)} e^{st} + v_c(0^-) = v e^{st} + v_c(0^-) - v$$

$\frac{-I}{Cs}$

به طور مشابه می توان اثبات کرد اگر $s \neq 0$، فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه باشد، فرکانس طبیعی جریان شاخه هم خواهد بود.

$s = 0$ ممکن است فرکانس طبیعی ولتاژ شاخه باشد ولی فرکانس طبیعی جریان همان شاخه نباشد تحت چه شرایطی؟

جریان ولتاژ و بالعکس.

WWW.MOHANDESYAR.COM

قضیه: فرکانس های طبیعی غیرصفر هر شبکه خطی و تغییرناپذیر با زمان همان ریشه های غیرصفر معادله دترمینان $p(s)$ است که $p(s)$ ماتریسی است که در یکی از ۴ روش، معادلات مدار را توصیف می کند.

در روش گره: $Y_n(s)E(s) = I_s(s) + \alpha \longrightarrow p(s) = Y_n(s)$

در روش مش: $Z_n(s)I(s) = E_s(s) + \alpha \longrightarrow p(s) = Z_n(s)$

در روش حلقه اساسی: $Z_B(s)I(s) = E_s(s) + \alpha \longrightarrow p(s) = Z_B(s)$

در روش کات ست اساسی: $Y_Q(s)E(s) = I_s(s) + \alpha \longrightarrow p(s) = Y_Q(s)$

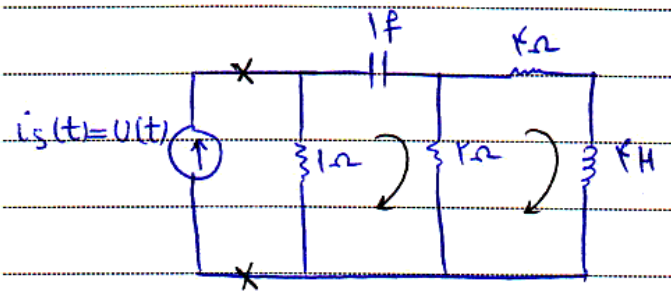
اثبات) مثلاً در روش گره:

$$E(s) = Y_n^{-1}(s)\left(I_s(s) + \alpha\right)$$

$$E(s) = \frac{\text{ماتریس دترمینان کهاد}}{\det(Y_n(s))}\left[I_s(s) + \alpha\right]$$

ریشه های آن فرکانس های طبیعی را می دهد.

مثال) فرکانس های طبیعی شبکه را به دست آورید؟



ورودی را می کشیم و دو مش می زنیم.

$$Z_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{D} + 3 & -2 \\ -2 & 2 + 4D + 4 \end{bmatrix}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$Z_n(s)=\begin{bmatrix} \frac{3s+1}{s} & -2 \\ -2 & 4s+6 \end{bmatrix}$$

$$\det(Z_n(s)) = \frac{(3s+1)(4s+6)-4s}{s} = \frac{12s^2+18s+6}{s} = \frac{6(2s^2+3s+1)}{s}$$

$$|Z_n(s)| = 0 \xrightarrow[\frac{-3\pm1}{4}]{} \begin{cases} s=-1/2 \\ s=-1 \end{cases}$$

مرتبه مدار و تعداد فرکانس های طبیعی :

مرتبه ی

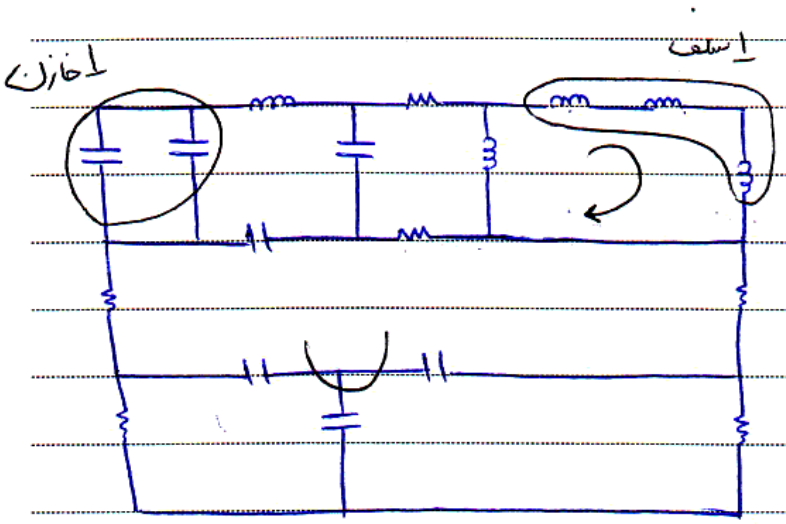
به درجه دترمینان $P(s)$ ($|P(s)|$) ، دترمینان مدار می گوییم که معادل با :

(تعداد کات ست های سلفی) - (تعداد حلقه های خازنی) - (تعداد عناصر ذخیره کننده انرژی)

که برابر با تعداد فرکانس های طبیعی نیز هست تعداد فرکانس های طبیعی غیر صفر :

(تعداد حلقه های سلفی) - (تعداد کات ست های خازنی) - (مرتبه مدار)

مثال)



WWW.MOHANDESYAR.COM

تعداد فرکانس های طبیعی = ۹

تعداد فرکانس های غیر صفر = ۷

تعداد عناصر ذخیره کننده = ۹
تعداد حلقه های خازنی = ۰
کات ست سلفی = ۰
تعداد کات ست خازنی = ۱
حلقه سلفی = ۱

مرتبه مدار = ۹

فرکانس های طبیعی و معادلات حالت :

در معادلات حالت داشتیم : $X(S) = (SI - A)^{-1}\left[BU(S) + x(0^-)\right]$

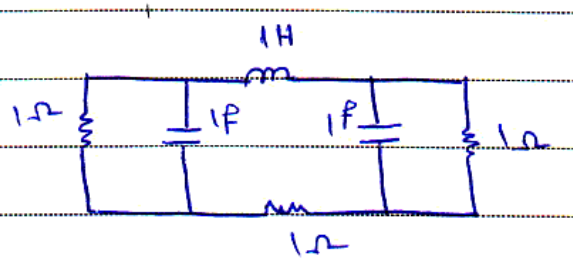
در فرکانس های طبیعی ← ورودی صفر

$$X(S) = (SI - A)^{-1}\, x(0^-)$$

روش دیگر برای بدست آوردن فرکانس های طبیعی : $|(SI - A)| = 0$

ضمناً قبلی مدار معادل با دترمینان $(SI - A)$ است یعنی دترمینان $|(SI - A)|$

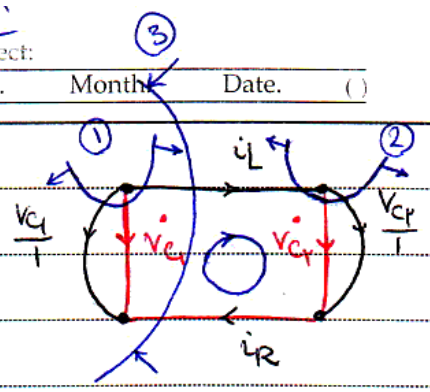
مثال) با استفاده از معادلات حالت، فرکانس های طبیعی را پیدا کنید؟



وقتی از طریق معادلات حالت می خواهیم فرکانس های طبیعی را پیدا کنیم به ماتریس B نیاز نیست، یعنی حتی اگر مدار دارای ورودی باشد، می توانیم ورودی ها را پاک کنیم. منابع وابسته را نمی توانیم پاک کنیم

WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject:
Year. Month Date. ( )



KCL: $\dot{V}_{C_1} + V_C + i_L = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{V}_{C_1} = -V_{C_1} - i_L}$

KCL: $\dot{V}_{C_2} + V_{C_2} - i_L = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{V}_{C_2} = -V_{C_2} + i_L}$

KVL: $\dot{i}_L + V_{C_2} + i_R \times 1 - V_{C_1} = 0 \longrightarrow \boxed{\dot{i}_L = V_{C_1} - V_{C_2} - i_R}$

KCL: $i_R - i_L = 0 \longrightarrow i_R = i_L$ $\qquad \boxed{\dot{i}_L = V_{C_1} - V_{C_2} - i_L}$

حال می‌توانیم ماتریس A و سپس $(SI - A)$ را محاسبه کنیم.

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{C_1} \\ \dot{V}_{C_2} \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix}$$

$$SI - A = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 1 \\ 0 & s+1 & -1 \\ -1 & 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$\det(SI - A) = 0 \longrightarrow$ فرکانس‌های طبیعی

$$|SI - A| = (s+1)\left[(s+1)^2 + 1\right] + (s+1)$$

$$= (s+1)\left[s^2 + 2s + 2\right] + (s+1) = (s+1)(s^2 + 2s + 3)$$

$$\frac{-2 \pm 2\sqrt{2}\,j}{2}$$

$s_1 = -1$

$s_2 = -1 + j\sqrt{2}$

$s_3 = -1 - j\sqrt{2}$

WWW.MOHANDESYAR.COM

مطابق با ابتدا، ۳ فرکانس طبیعی داریم.

فصل ۱۵: توابع شبکه

به طور کلی تابع شبکه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\left[\text{پاسخ حالت صفر}\right]}{\mathcal{L}\left[\text{منبع ورودی}\right]}$$

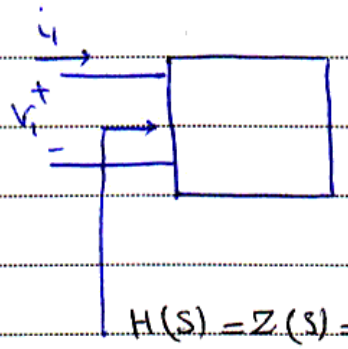
معمول است که در بررسی تابع شبکه، منبع ورودی را تابع ضربه در نظر می‌گیرند.

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\left[h(t)\right]}{\mathcal{L}\left[\delta(t)\right]} = \mathcal{L}\left[h(t)\right]$$

$h(t)$ پاسخ ضربه می‌باشد.

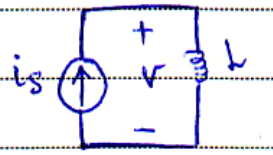
انواع تابع شبکه:

۱) امپدانس نقطه محرک: (Z_s)



$$H(s) = Z(s) = \frac{V_1(s)}{I_1(s)}$$

مثال:

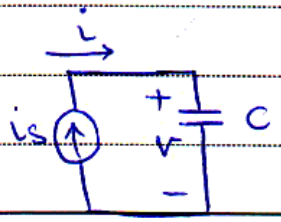


$$v = L\frac{di_s}{dt} = L s I_s(s) - \cancel{L i_L(0^-)}$$

گفتیم که تابع شبکه در حالت صفر محاسبه می‌شود.

$$\Rightarrow Z_s = \frac{V(s)}{I(s)} = Ls$$

مثال:

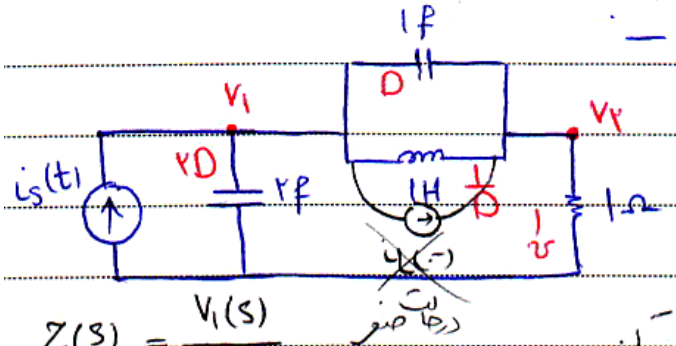


$$v = \frac{1}{C}\int_0^t i_s\,dt + \cancel{v_C(0^-)}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$V(s)=\frac{1}{Cs}I(s) \longrightarrow Z(s)=\frac{1}{Cs}$$

مثال) در مدار زیر، امپدانس نقطه‌ی یک را بدست آورید؟



$$Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}$$

از روش گره حل می‌کنیم. هدف بدست آوردن $Z(s)$ است.

شرایط اولیه نداریم. مستقیماً معادلات حوزه‌ی لاپلاس را می‌نویسیم. (D را به s تبدیل می‌کنیم.)

$$\begin{bmatrix} 2s+s+\frac{1}{s} & -(s+\frac{1}{s}) \\ -(s+\frac{1}{s}) & s+\frac{1}{s}+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix} 2V_1(-)+__ \\ __ \end{bmatrix}}_{\text{ناشی از شرایط اولیه}=0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3s+1 & -\frac{s^2+1}{s} \\ -\frac{s^2+1}{s} & \frac{s^2+s+1}{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

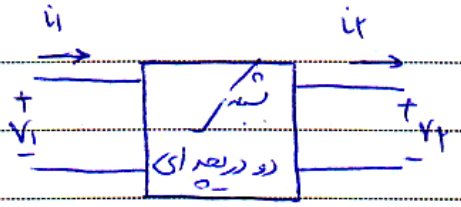
$$V_1=\frac{\frac{s^2+s+1}{s}I_s}{\frac{(3s^2+1)(s^2+s+1)}{s^2}-\frac{(s^2+1)^2}{s^2}} \Rightarrow Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}=\frac{s(s^2+s+1)}{(3s^2+1)(s^2+s+1)-(s^2+1)^2}$$

تعریف توابع شبکه با استفاده از دو ضلعی‌ها:

برخی توابع شبکه را با استفاده از شبکه‌های دو دریچه‌ای تعریف می‌کنیم.

WWW.MOHANDESYAR.COM

۱) امپدانس نقطه تحریک: (وقتی تحریک از دریچه ۱ انجام شود)



$$H(S) = Z(S) = \frac{V_1(S)}{I_1(S)}$$

۲) امپدانس انتقالی:

$$H(S) = \frac{V_2(S)}{I_1(S)}$$

۳) ادمیتانس انتقالی:

$$H(S) = \frac{I_2(S)}{V_1(S)}$$

۴) نسبت انتقال ولتاژ:

$$H(S) = \frac{V_2(S)}{V_1(S)}$$

۵) نسبت انتقال جریان:

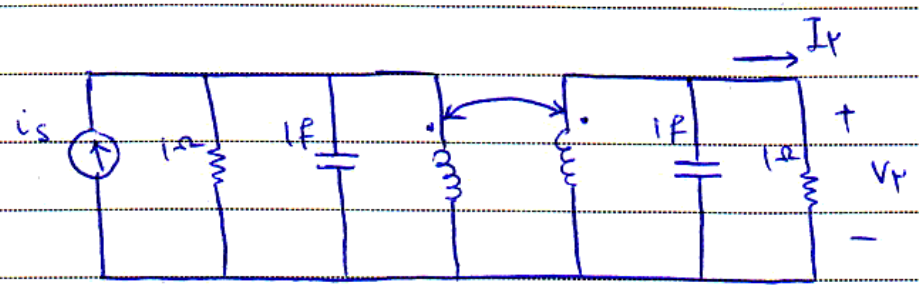
$$H(S) = \frac{I_2(S)}{I_1(S)}$$

گاهاً از ترکیب این توابع استفاده می‌کنیم

مثلاً $\dfrac{\left(\frac{I_1}{V_2}\right)}{\frac{V_1}{V_2}} = \dfrac{I_1}{V_1}$ ادمیتانس نقطه تحریک

مثال) در مدار زیر توابع شبکه زیر را محاسبه کنید؟

الف) امپدانس نقطه تحریک $\frac{V_1}{I_1}$ ب) امپدانس انتقالی $\frac{V_2}{I_1}$ ج) نسبت انتقال ولتاژ $\frac{V_2}{V_1}$



$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به ماهیت المان‌ها که به طور موازی اند از یکی از روش‌های گره یا کات ست استفاده می‌کنیم

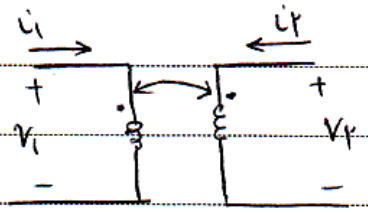
TABAN

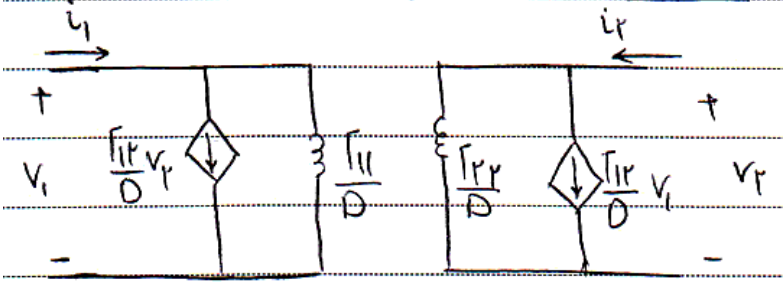
WWW.MOHANDESYAR.COM

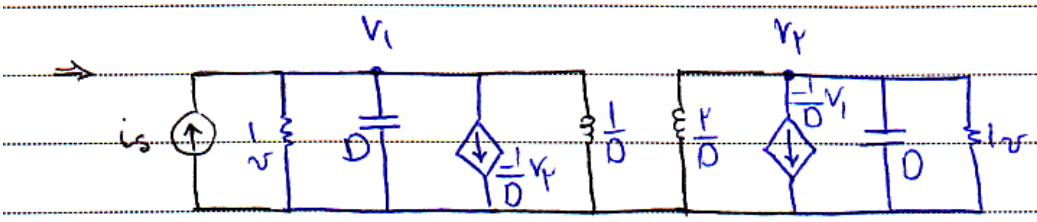
از روش مشابه گره :

$$L=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\longrightarrow \Gamma=L^{-1}=\frac{1}{2-1}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Gamma=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix}$$







$$\begin{bmatrix}s+1/s+1 & 0\\ 0 & \frac{2}{s}+s+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_s+\frac{1}{D}V_2\\ \frac{1}{D}V_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{s^2+s+1}{s} & \frac{-1}{s}\\ -1/s & \frac{s^2+s+2}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_s\\0\end{bmatrix}$$

$$Z(s)=\frac{V_1(s)}{I_s(s)}\qquad H_1(s)=\frac{V_2(s)}{I_s(s)}\qquad H_2(s)=\frac{V_2(s)}{V_1(s)}=\frac{H_1(s)}{Z(s)}$$

$$V_1(s)=\frac{\frac{s^2+s+1}{s}\,I(s)}{\frac{(s^2+s+1)(s^2+s+2)}{s^2}-\frac{1}{s^2}}\Rightarrow \boxed{Z(s)=\frac{s(s^2+s+1)}{(s^2+s+1)(s^2+s+2)-1}}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$V_2(s) = \frac{\frac{1}{s} I_g(s)}{\frac{(s^2+s+1)(s^2+s+2)}{s^2} - \frac{1}{s^2}} \Rightarrow \boxed{H_1(s) = \frac{s}{(s^2+s+1)(s^2+s+2)-1}}$$

$$\boxed{H_2(s) = \frac{1}{s^2+s+1}}$$

پاسخ‌های قطب و صفر:

این بخش روی تابع تبدیل توابع و ترسیم آن در صفحه مختلط طرح می‌کند.

تابع $H(s)$ را در نظر بگیرید. فرم کلی تابع تبدیل:

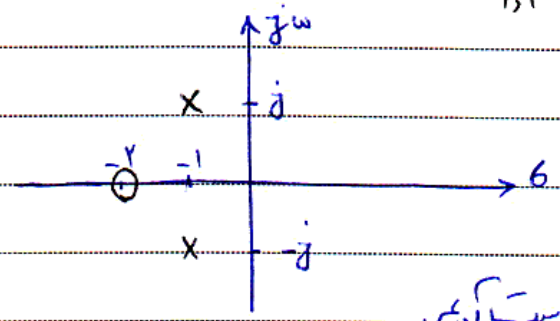
$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \qquad m \leq s \qquad m \leq n$$

در صفحه مختلط $(\sigma, j\omega)$، صفرهای تابع تبدیل را با علامت O و قطب‌ها را با X نمایش می‌دهیم.

به مثال بدست آمده، پاسخ‌های قطب و صفر می‌گوییم.

تابع تبدیل زیر دقت کنید:

$$H(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+2} \quad \begin{cases} z_1 = -2 \\ p_{1,2} = -1 \pm j \end{cases}$$



از روی شکل نمی‌توانیم به تابع تبدیل برسیم ولی K را نمی‌توانیم بدست آوریم.

برای بدست آوردن K باید در یک نقطه مشخص مقدار تابع تبدیل را داشته باشیم.

TABAN

WWW.MOHANDESYAR.COM

فرض کنید $H(j0)=2$

$$H(j\omega)=\frac{K(2+j\omega)}{2-\omega^2+2j\omega}$$

$$H(j0)=\frac{2K}{2}=2 \longrightarrow K=2 \quad \Rightarrow \quad H(s)=\frac{2(s+2)}{s^2+2s+2}$$

تابع شبکه در حالت دائمی سینوسی: ورودی Sin یا Cos است.

$$x(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

ورودی پله و ضربه و ... نداریم

$$\boxed{H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}} \qquad H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \qquad Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=|X(j\omega)|\angle X(j\omega)\times|H(j\omega)|\angle H(j\omega)$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=|X(j\omega)||H(j\omega)|\angle\angle X(j\omega)+\angle H(j\omega)$$

در حوزه دائمی سینوسی:

$$\overset{x(t)}{\cancel{x(j\omega)}}=A\cos(\omega t+\phi) \longrightarrow X(j\omega)=A\angle\phi$$

$$|Y(j\omega)|\angle Y(j\omega)=A|H(j\omega)|\angle\phi+\angle H(j\omega)$$

$$\xrightarrow{\text{انتقال به رژیم سینوسی}} y(t)=A|H(j\omega)|\cos(\omega t+\phi+\angle H(j\omega))$$

مثال) فرض کنید

$$y(t)=? \Leftarrow x(t)=\cos t\,u(t), \quad H(s)=\frac{s^2+4}{(s+2)(s^2+3s+4)}$$

راه حل سخت:

$$X(s)=\frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s)=X(s)H(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t)$$

$$x(t)=A\cos(\omega t+\theta) \Rightarrow X(j\omega)=A\angle\theta$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

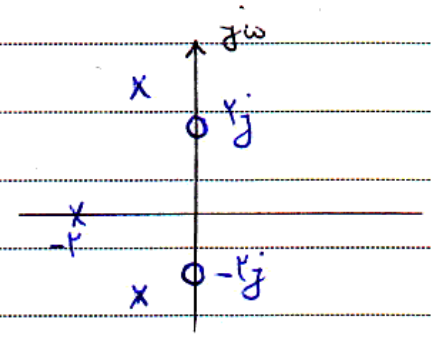
راه حل آسان: چون ورودی در رژیم سینوسی یک فرکانس است از تحلیل سینوسی حالت ماندگار استفاده می‌کنیم.

$\omega = 1$

$$H(j1) = \frac{4-1}{(2+j1)(4-1+3j\omega)} = \frac{3}{(2+j1)(3+3j\omega)} = \frac{1}{(2+j)(1+j)}$$

$$H(j1) = \frac{1}{1+3j} = \frac{1}{\sqrt{10}\angle 71.5^\circ} = \frac{1}{\sqrt{10}}\angle -71.5^\circ$$

$$x(j1) = 1\angle 0$$



$$Y(j1) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{10}}\angle(0+(-71.5)) = \frac{1}{\sqrt{10}}\angle -71.5^\circ$$

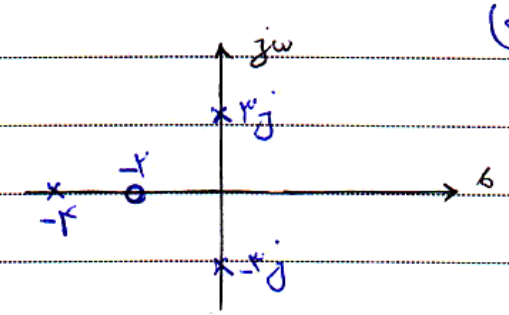
$$\rightarrow y(t) = \frac{1}{\sqrt{10}}\cos(t - 71.5^\circ)$$

تمرین) اگر $x(t) = \cos 2t \rightarrow y(t) = ?$

$$H(j\omega) = \frac{4-\omega^2}{(2+j\omega)(4-\omega^2+3j\omega)}$$

$$H(j2) = 0 \longrightarrow Y(j2) = 0 \longrightarrow y(t) = \cancel{x}\,0$$

تمرین) $x(t) = \cos 3t$ $\quad H(s) = \dfrac{s+2}{(s^2+9)(s+4)}$ $\quad , y(t) = ?$



$$H(j\omega) = \frac{2+j\omega}{(9-\omega^2)(4+j\omega)} \longrightarrow H(j3) = \infty$$

$$\longrightarrow Y(j3) = \infty \longrightarrow y(t) = \infty$$

اگر صفر تابع تبدیل روی محور jω قرار داشته باشد، پاسخ حالت دائمی سینوسی به ازای آن فرکانس صفر است.

TABAN

WWW.MOHANDESYAR.COM

اگر قطبی روی محور $j\omega$ قرار داشته باشد پاسخ حالت دائمی سینوسی به ازای آن فرکانس بی‌نهایت است.

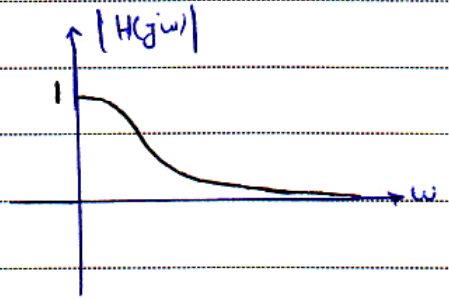
این حالت به معنای تحریک هر مان دو فرکانس طبیعی است.

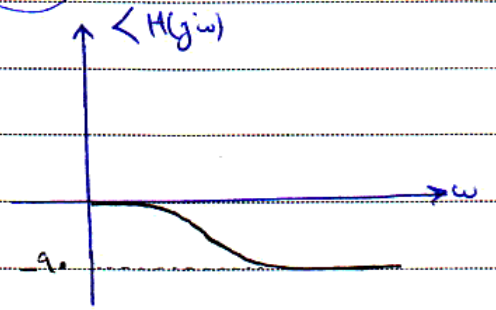
پاسخ فرکانسی: $H(j\omega) = |H(j\omega)| \angle H(j\omega)$

به اطلاعات مربوط به $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$، پاسخ فرکانسی می‌گوییم.

مثال) $H(s) = \dfrac{1}{s+1}$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{\sqrt{1}\angle 0}{\sqrt{1+\omega^2}\angle tg^{-1}\omega} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}}_{|H(j\omega)|} \angle \underbrace{-tg^{-1}\omega}_{\angle H(j\omega)}$$





در این درس به مثال $|H(j\omega)|$ و $\angle H(j\omega)$ در یک امگا مشخص می‌شیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

1) نقطه‌ی صفر تابع را مشخص می‌کنیم.

$$H(s) = \frac{K\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

یعنی:

$$H(j\omega) = \frac{K(j\omega)\prod_{j=1}^{m}(j\omega-z_j)}{\prod_{j=1}^{n}(j\omega-p_j)}$$

TABAN

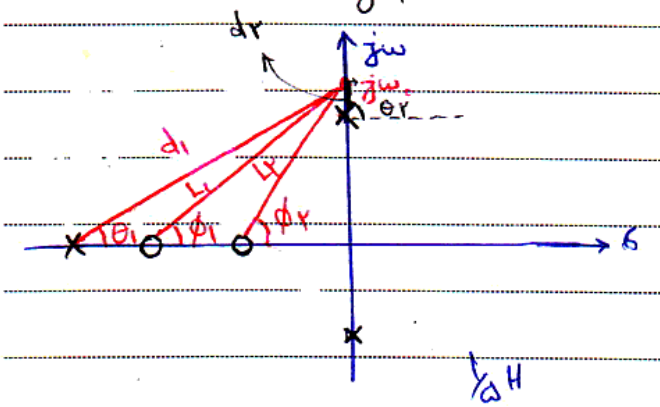
WWW.MOHANDESYAR.COM

$$|H(j\omega)| = |K(j\omega)| \cdot \sum_{j=1}^{m} |j\omega - z_j| \Big/ \sum_{j=1}^{n} |j\omega - p_j|$$

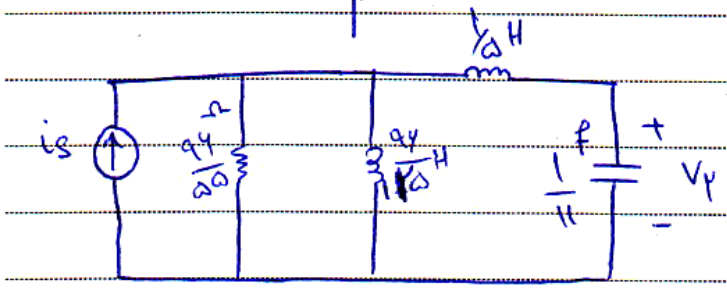
$$\angle H(j\omega) = \angle K(j\omega) + \sum_{j=1}^{m} \angle (j\omega - z_j) - \sum_{j=1}^{n} \angle (j\omega - p_j)$$

۲) قطب‌ها و صفرها را در صفحه s مشخص می‌کنیم و از قطب‌ها و صفرها به نقطه $j\omega_0$ یعنی نقطه‌ای که می‌خواهیم اندازه و فاز را در آن به دست آوریم، خطوطی را رسم می‌کنیم. هرگاه اندازه بردارهایی که از صفرها رسم می‌شوند را با L_1، L_2، ...، L_m و زوایای این بردارها را با محور حقیقی با ϕ_1، ϕ_2، ...، ϕ_m نشان دهیم و همچنین اندازه بردارهایی را که از قطب‌ها رسم می‌شوند با d_1، d_2، ...، d_n نشان دهیم و زوایای این بردارها را با محور حقیقی با θ_1، θ_2، ...، θ_n نشان دهیم:

$$|H(j\omega_0)| = \frac{|K(j\omega)| \prod_{j=1}^{m} L_j}{\prod_{j=1}^{n} d_j} \quad , \quad \angle H(j\omega_0) = \sum_{j=1}^{m} \phi_j - \sum_{j=1}^{n} \theta_j$$



مثال) برای حل، چون $H(s)$ در حالت صفر



محاسبه می‌شود پس شرایط اولیه نداریم.

WWW.MOHANDESYAR.COM

الف) $H(s) = \dfrac{V_2(s)}{I_s(s)}$

ب) خروجی به ازای $i_s(t) = 15\cos(4t - 30)$.

الف) حل از روش α

$$\begin{bmatrix} \frac{55}{96} + \frac{125}{96s} + \frac{5}{s} & \frac{-5}{s} \\ \frac{-5}{s} & \frac{5}{s} + \frac{s}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{535 + 55s}{96s} & \frac{-5}{s} \\ \frac{-5}{s} & \frac{s^2 + 55}{11s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2(s) = \frac{\frac{5}{s} I(s)}{\frac{(55s + 535)(s^2 + 55)}{96 \times 11 s^2} - \frac{25}{s^2}}$$

$$\frac{V_2(s)}{I_s(s)} = \frac{96s}{(s+5)(s^2 + 6s + 25)}$$

$Z = 0$

$p_1 = -5$

$p_{2,3} = -3 \pm 4j$

$I_s(j\omega) = 15 \angle -30 \Rightarrow I_s(j4) = 15 \angle -30$

$I_s(s) = 15 \angle -30 \qquad \omega_0 = 4$

ب) حل از طریق راه اول :

$$H(j4) = \frac{96 \times 4j}{(5+4j)(9+24j)} = 2.2207j = 2.336 \angle -18.13$$

$I_s(j4) = 15 \angle -30$

$$\rightarrow V_2(j4) = 2.336 \times 15 \angle -30 - 18.13 \Rightarrow V_2(j4) = 35.04 \angle -48.13$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

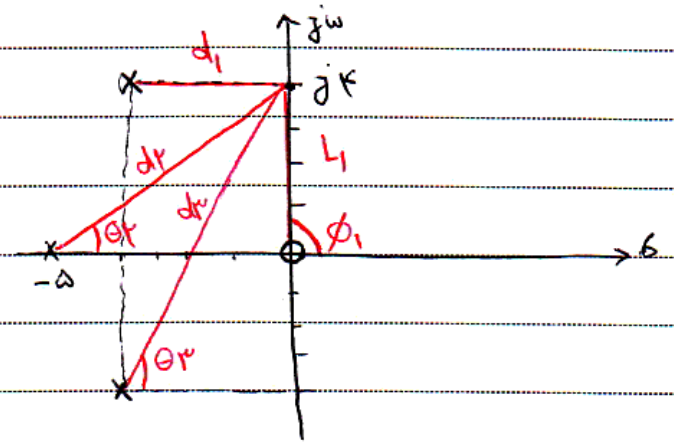
$\longrightarrow v_2(t) = 30.4 \cos(4t - 48.13)$

حل از راه حل دوم: از تکنیک قطب و صفر استفاده می‌کنیم

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{I_s(s)} = \frac{96s}{(s+5)(s^2+6s+25)}$$

$z \longrightarrow s = 0$

$p \longrightarrow -5 \,,\, -3 \pm 4j$



$$\begin{cases} d_1 = 3 \\ \theta_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_2 = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6.4 \\ \theta_2 = tg^{-1}\frac{4}{5} = 38.28 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_3 = \sqrt{8^2 + 3^2} = 8.54 \\ \theta_3 = tg^{-1}\frac{8}{3} = 69.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 = 4 \\ \phi_1 = 90 \end{cases} \qquad |H(j4)| = \frac{|k|\, L_1}{d_1 d_2 d_3} = \frac{96 \times 4}{6.4 \times 3 \times 8.54} = 2.34$$

$$\angle H(j4) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \angle k = 90 - 38.28 - 69.5 = -18.18$$

$$H(j4) = 2.34 \angle -18.18$$

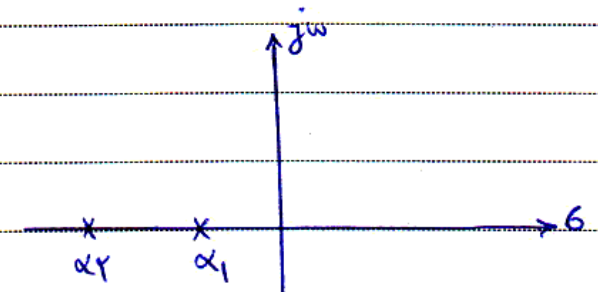
$$V_2(j4) = 15 \angle -30 \times 2.34 \angle -18.18 = 35 \angle -48.18$$

$$v_2(t) = 35 \cos(4t - 48.18)$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

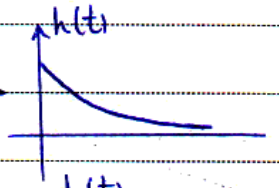
بررسی قطب‌ها تابع شبکه:

الف) قطب‌های حقیقی:



$$H(S) = \frac{K_1}{S-\alpha_1} + \frac{K_2}{S-\alpha_2} \Rightarrow h(t) = K_1 e^{\alpha_1 t} + K_2 e^{\alpha_2 t}$$

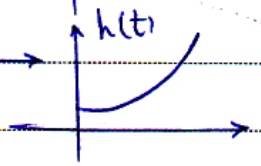
$\alpha_1 < 0 , \alpha_2 < 0 \longrightarrow$



تابع پایدار است.

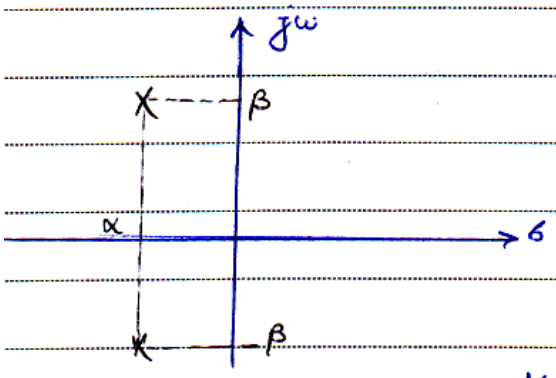
$\alpha_1 > 0$ یا $\alpha_2 > 0$ $\longrightarrow$

اگر یکی مثبت باشد.



ناپایدار

ب) قطب‌های مزدوج:



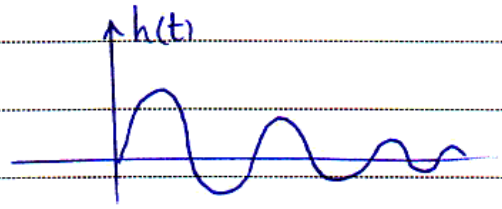
$$S_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

$$H(S) = \frac{K}{S-(\alpha+j\beta)} + \frac{K^*}{S-(\alpha-j\beta)}$$

$$h(t) = 2|K| e^{\alpha t} \cos(\beta t + \angle K)$$

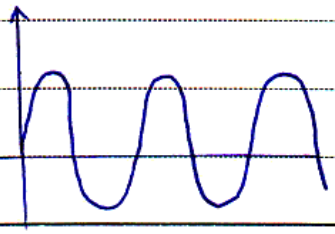
به α ضریب میرایی و به β فرکانس نوسان می‌گوییم.

$\alpha < 0$



قطب‌ها سمت چپ محور jω $\longrightarrow$ وضعیت پایدار

$\alpha = 0$

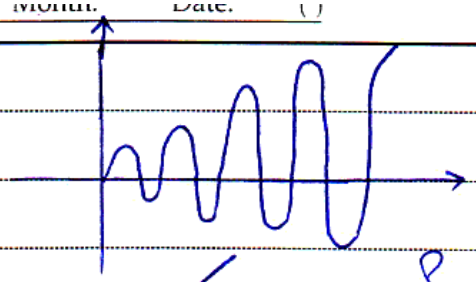


قطب‌ها روی محور $\longrightarrow$ وضعیت مرز پایداری

(در عمل امکان‌پذیر نیست)

WWW.MOHANDESYAR.COM

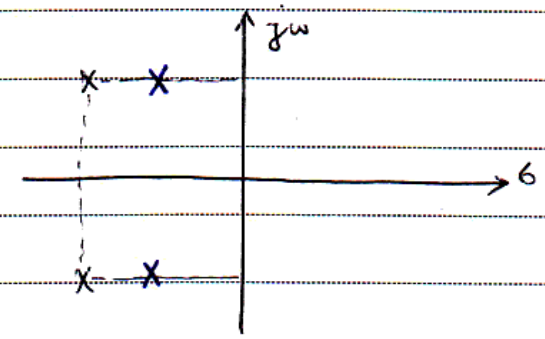
$\alpha > 0$

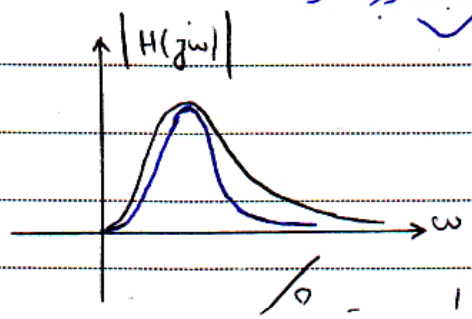


قطب‌ها سمت راست ← وضعیت ناپایدار

✓ به طور کلی هر قطبی چه حقیقی چه مزدوج اگر سمت راست محور $j\omega$ باشد، ایجاد ناپایداری می‌کند.

✓ وجود قطب مزدوج (مختلط) در پاسخ فرکانسی تابع شبکه ایجاد پیک‌های نوسانی می‌کند. هرچه این قطب‌ها از محور $j\omega$ دورتر باشند پیک‌ها باندپهن‌تر است.





فرکانس‌های صفر و قطب‌های تابع شبکه:

فرکانس‌های صفر را از یکی از روش‌های زیر بدست می‌آوریم:

$|Y_n(s)| = 0$

یا

$|Z_m(s)| = 0$

یا

$|Z_B(s)| = 0$

یا

$|Y_Q(s)| = 0$

قابل فهم است که هر قطب تابع شبکه فرکانس صفر نیست، اما ممکن است یک فرکانس صفر، قطب تابع شبکه نباشد.

WWW.MOHANDESYAR.COM

خاصیت تقارن در تابع شبکه :

فرم کلی تابع شبکه :

$$H(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \qquad m\leq n$$

در حوزه ماندگار $s \longrightarrow j\omega$

$(j\omega)^2=-\omega^2$ $\qquad (j\omega)=j\omega$

$(j\omega)^4=\omega^4$ $\qquad (j\omega)^3=-j\omega^3$

$(j\omega)^6=-\omega^6=(j\omega)^4\times(j\omega)^2$ $\qquad (j\omega)^5=j\omega^5=(j\omega)^3\times(j\omega)^2$

$(j\omega)^8=\omega^8=(j\omega)^6\times(j\omega)^2$ $\qquad (j\omega)^7=-j\omega^7$

$\vdots$ $\qquad \vdots$

$$H(j\omega)=\frac{(b_0-b_2\omega^2+b_4\omega^4-\dots)+j\omega(b_1-b_3\omega^2+b_5\omega^4-\dots)}{(a_0-a_2\omega^2-a_4\omega^4-\dots)+j\omega(a_1-a_3\omega^2+a_5\omega^4-\dots)}$$

$$H(j\omega)=\frac{(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2)+j\omega(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2)}{(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2)+j\omega(\text{چندجمله‌ای از } \omega^2)}$$

$$\begin{cases}|H(j\omega)|=|H(-j\omega)|\\ Re[H(j\omega)]=Re[H(-j\omega)]\end{cases} \qquad \begin{cases}\angle H(j\omega)=-\angle H(-j\omega)\\ Im[H(j\omega)]=-Im[H(-j\omega)]\end{cases}$$

مثال) اطلاعات زیر از یک تابع شبکه داده شده، حداقل تعداد قطب و صفرها چیست؟

$|H(j0)|=1$

$|H(j1)|=0 \qquad |H(j\infty)|=0$

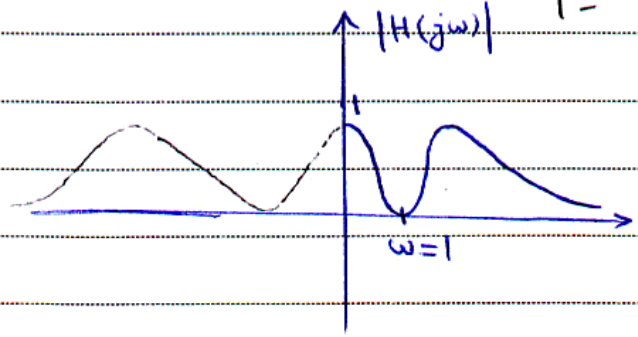
WWW.MOHANDESYAR.COM

با توجه به خاصیت تقارن : $|H(-j1)| = 0$

پس دو صفر داریم. $s = j$ و $s = -j$ حداقل

با توجه به اینکه $|H(j\infty)| = 0$ یعنی درجه مخرج از درجه صورت حداقل یکی بالاتر است. یعنی حداقل ۳ قطب داریم. حتماً یکی از قطب ها حقیقی است و ممکن است دو قطب دیگر مزدوج باشند.

$$H(s) = \frac{(s-j)(s+j) = (s^2+1)}{(s-\gamma)(s-(\alpha+j\beta))(s-(\alpha-j\beta))}$$



WWW.MOHANDESYAR.COM

Subject : تست الکترونیک ارشد Date : / /

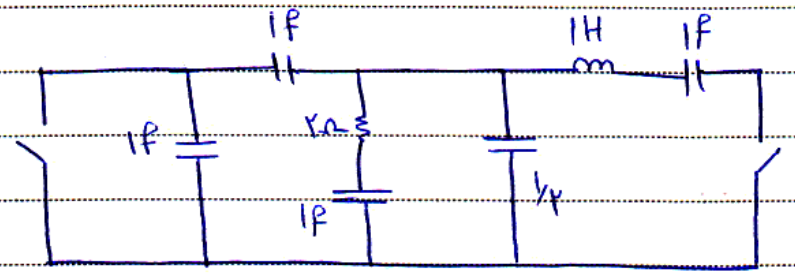
A) در مدار شکل زیر در دو حالت باز بودن کلیدها و بسته بودن کلیدها کدام گزینه صحیح است؟

۱) تعداد فرکانس های طبیعی در هر دو حالت ۵ است.

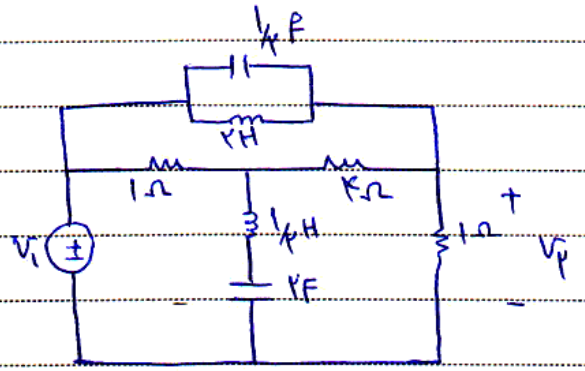
۲) تعداد فرکانس های طبیعی غیر صفر در یک حالت برابر ۱ است.

۳) تعداد فرکانس های طبیعی صفر در یک حالت برابر تعداد فرکانس های طبیعی غیر صفر در حالت دیگر است.

۴) موارد ۲ و ۳.



B) در مدار زیر تابع تبدیل $\frac{V_2}{V_1}$ کدام است؟



۱) $\frac{2(s^2+1)}{(s+1)^2}$

۲) $\frac{s^2+1}{(s+2)^2}$

۳) $-\frac{s^2+1}{s^2+s+1}$

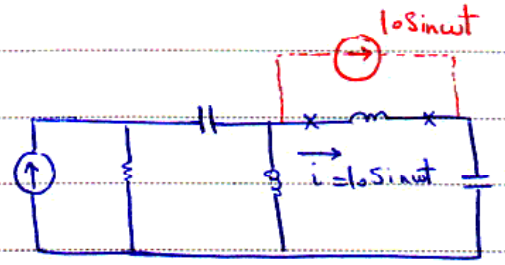
۴) $-\frac{s^2+1}{(s+1)^2}$

WWW.MOHANDESYAR.COM

«قضایای شبکه»

قضیه جانشینی: کاربرد در شبکه‌های خطی، غیرخطی، تغییرناپذیر و تغییرپذیر با زمان

قضیه: هرگاه در شبکه N با مشخصات داده شده، عنصری با شاخه‌ای مانند K که ترکیبی از سایر عناصر شبکه نیز در تماس باشد، چنانچه ولتاژ این شاخه برابر با $V_K(t)$ و جریانش برابر با $J_K(t)$ بوده و معادله تغییرات آن مشخص باشد، می‌توان به جای شاخه K، منبع ولتاژی که معادله تغییراتش برابر با $V_K(t)$ یا منبع جریانی که معادله تغییراتش برابر با $J_K(t)$ باشد قرار داد.



قضیه جمع آثار: کاربرد در شبکه‌های خطی (تغییرناپذیر یا تغییرپذیر با زمان)

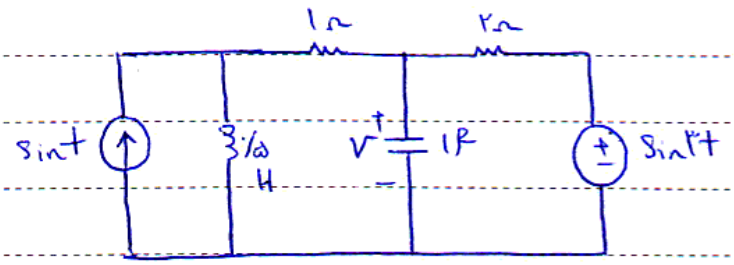
هرگاه شبکه N با مشخصات داده شده، فرض باشد این شبکه توسط تعدادی منبع مستقل تحریک شود، پاسخ حالت ضربه‌ای برابر است با جمع جبری پاسخ‌های حالت ضربه‌ای از اعمال هر یک از منابع مستقل در صورتی که به تنهایی به شبکه اعمال شوند.

قضیه فرعی: هرگاه شبکه N خطی و تغییرناپذیر با زمان در حالت دائمی سینوسی باشد، پاسخ حالت ضربه (پاسخ حالت دائمی) ناشی از اعمال یک تعداد منابع سینوسی مستقل (حتی با فرکانس‌های متفاوت) برابر است با:

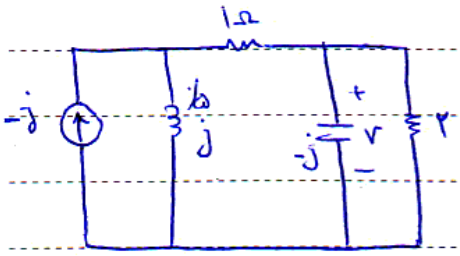
WWW.MOHANDESYAR.COM

مجموع جمع پاسخ‌های واقعی سینوسی ناشی از اعمال هر یک از منابع وقتی به تنهایی به شبکه اعمال می‌شوند.

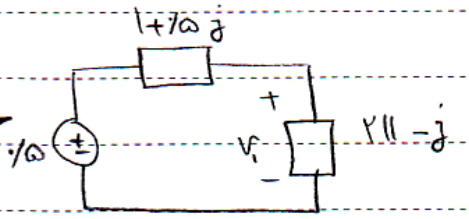
مثال) $v(t)$ را در مدار زیر پیدا کنید؟



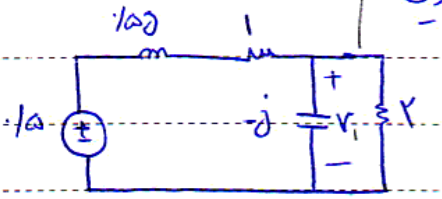
حل: از جمع آثار استفاده می‌کنیم و از تحلیل سینوسی حالت ماندگار.



$\omega = 1$



$\Downarrow$

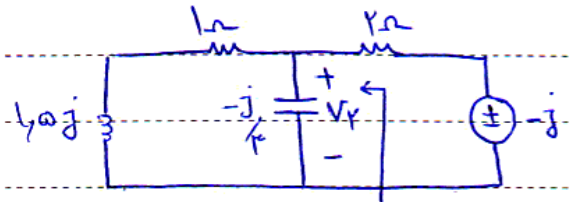


v ناشی از منبع جریان

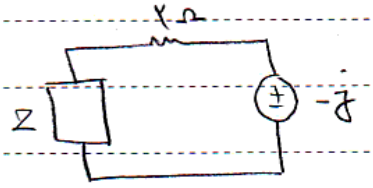
$$v_1 = \frac{(2\|-j)}{0.5j+1+(2\|-j)} \times 0.5 = \frac{0.4-0.8j}{0.5j+1+0.4-0.8j} \times 0.5$$

$$v_1 = \frac{8}{41} - \frac{10}{41}j = 0.31 \angle -51.34$$

$$\Rightarrow v_1(t) = 0.31 \cos(t - 51.34)$$



$\omega = 3$



$$Z = (1+1.5j) \| (-j/4) = 0.47 - 0.388j$$

v ناشی از منبع ولتاژ

$$v_2 = -j \times \frac{(0.47 - 0.388j)}{2 + (0.47 - 0.388j)} = -0.178 - 0.698j = 0.187 \angle 197.7$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

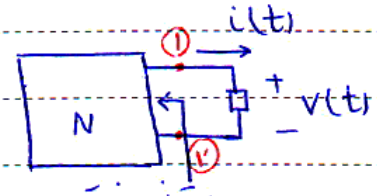
$v_2(t) = 0/187 \cos(3t + 197/7)$

چون فرکانس‌ها متفاوت‌اند مجبوریم در حوزه زمان، آن‌ها را با هم جمع کنیم. $v(t) = v_1(t) + v_2(t) =$

$v(t) = 0/31 \cos(t - 51/34) + 0/187 \cos(3t + 197/7)$

تعیین پارامترهای معادل تونن و نورتن: کاربرد در شبکه‌های خطی، تغییرناپذیر با تغییر اندیس یا زمان

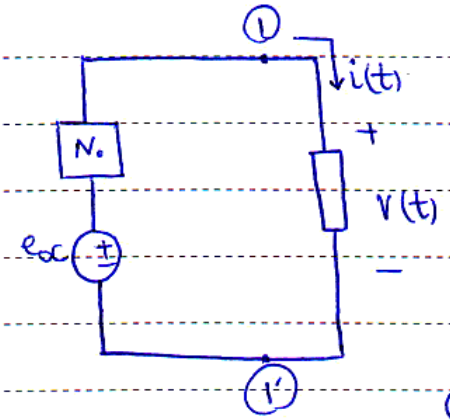
بر اساس این قضایا اگر شبکه N را با یک شبکه معادل تونن یا نورتن تعویض کنیم، هیچگونه تغییری در شکل موج جریان (یعنی $i(t)$) و شکل موج ولتاژ (یعنی $v(t)$) در مدار بیرونی شکل زیر حاصل نمی‌شود.



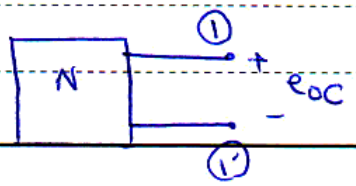
معادل تونن یا نورتن

شرط این است که بار تزویجی با سایر عناصر شبکه نداشته باشد.

تعیین شبکه‌ی معادل تونن: هر شبکه با مشخصات فوق را می‌توان با شبکه زیر معادل کرد، که در آن شبکه N_0 شبکه در حال استراحت یا شبکه معادل در وری صفر و حالت صفر شبکه اولیه است.



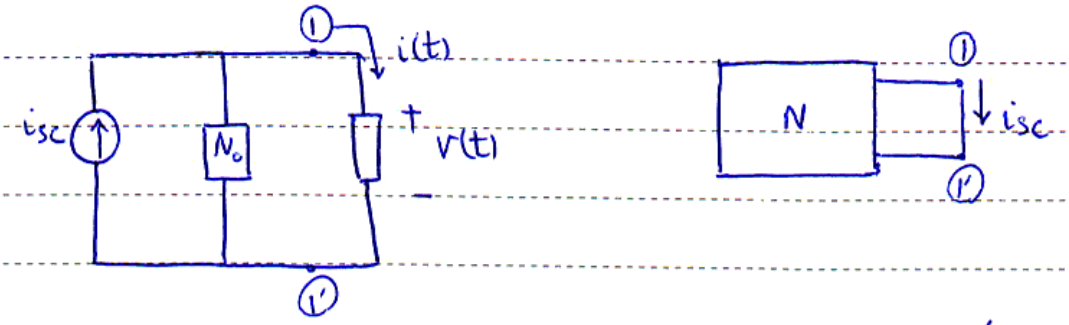
منبع ولتاژ e_{oc}، ولتاژ مدار باز دو سر (1) و (1') است که به وسیله منابع مستقل شبکه در شرایط اولیه به وجود می‌آید.



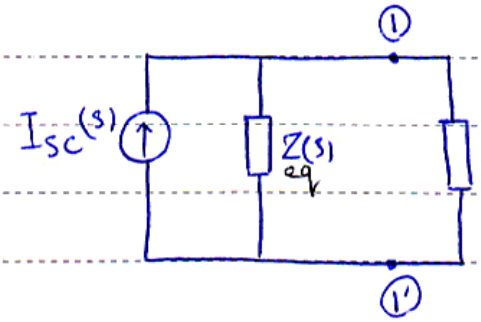
WWW.MOHANDESYAR.COM

تعیین شبکه معادل نورتن: هر شبکه با مشخصات مفروض را می‌توان با شبکه زیر معادل کرد که در آن شبکه N_0

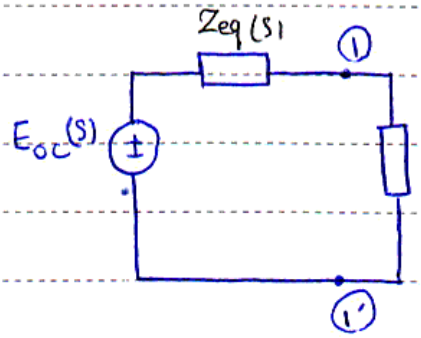
مشابه با حالت قبل است و I_{sc} جریان اتصال کوتاه دو سر (۱۱') ناشی از منابع مدار و شرایط اولیه آن است.



تعیین نمودن: هرگاه شبکه N خطی و تغییرناپذیر با زمان باشد، می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده نمود و مدارهای معادل تونن و نورتن را به صورت زیر حاصل کرد.



$$Z_{eq}(s) = \frac{E_{oc}(s)}{I_{sc}(s)}$$

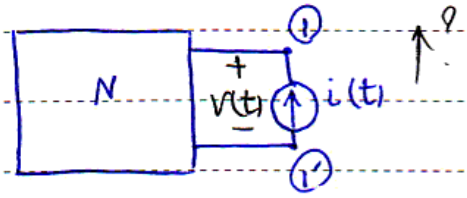


روش‌های به دست آوردن $Z_{eq}(s)$:

۱) روش اعمال منبع: یکی از دو روش زیر عمل می‌کنیم:

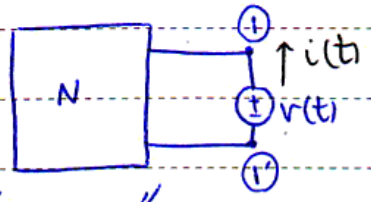
الف) یک منبع جریان $i(t)$ به دو سر (۱۱') اعمال می‌کنیم و ولتاژ دو سر آن را مانند شکل زیر به دست می‌آوریم.

WWW.MOHANDESYAR.COM



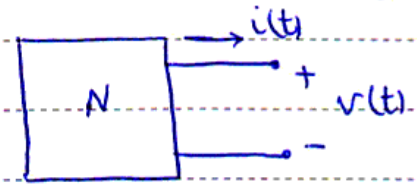
$$Z_{eq} = \frac{v(t)}{i(t)}$$

ب) یک منبع ولتاژ $v(t)$ به دو سر آن اعمال می‌کنیم و جریان آن را مانند شکل زیر به دست می‌آوریم:



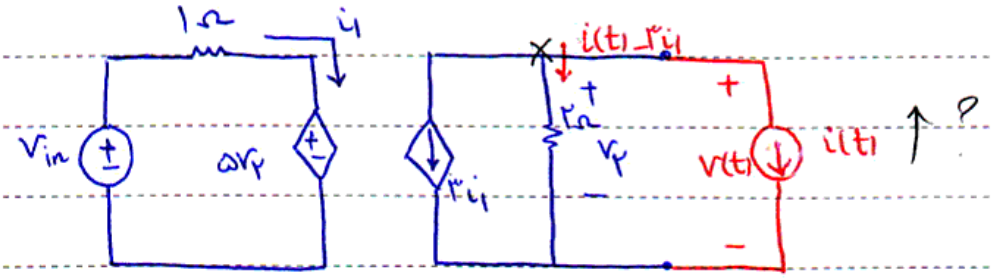
$$Z_{eq} = \frac{v(t)}{i(t)}$$

۲) معادله ولتاژ و جریان دو سر ①① را به صورت زیر به دست می‌آوریم: (e_{oc} و i_{sc} را جداگانه به دست می‌آوریم.)



$$v(t) = e_{oc} - Z_{eq}\, i(t)$$

مثال) معادل تونن از دیدگاه ①①'



حل: ۱- روش اعمال منبع: منبع جریان اعمال می‌کنیم.

$$V_2 = v(t) = 2(+i(t) - 3i_1)$$

$$\boxed{v(t) = +2i(t) - 6i_1} \quad ①$$

$$KVL: V_{in} = i_1 + 5v(t) \longrightarrow \boxed{i_1 = V_{in} - 5v(t)} \quad ②$$

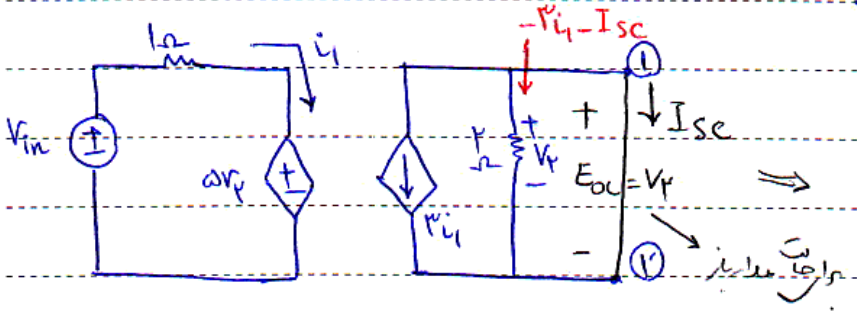
① و ② : $v(t) = +2i(t) - 6V_{in} + 30v(t) \Longrightarrow 29v(t) = 6V_{in} + 2i(t)$

WWW.MOHANDESYAR.COM

$$v(t) = \underbrace{\frac{6}{29} v_{in}}_{E_{oc}} - \underbrace{\frac{2}{29}}_{Z_{eq}} i(t)$$

حل از طریق به دست آوردن معادل :

(روش دوم)



$$v_2 = -2 \times 3 i_1 = -6 i_1 \qquad i_1 = \frac{v_{in} - 5v_2}{1} = v_{in} - 5(-6i_1)$$

$$i_1 = v_{in} + 30 i_1 \longrightarrow i_1 = \frac{-v_{in}}{29} \qquad \underbrace{v_2 = \frac{6}{29} v_{in}}_{E_{oc}} \longrightarrow E_{oc} = \frac{6}{29} v_{in} \qquad v_2 = e_{oc}$$

$$v_2 = 0 \longrightarrow 2(-3i_1 - I_{sc}) = 0 \Rightarrow -6i_1 - 2I_{sc} = 0 \longrightarrow \boxed{I_{sc} = -3i_1}$$

$$KVL: \; i_1 = v_{in} - \cancel{5v_2} \Rightarrow i_1 = v_{in} \longrightarrow \boxed{I_{sc} = -3v_{in}}$$

$$Z_{eq} = \frac{E_{oc}}{I_{sc}} = \frac{6/29}{-3} = \frac{-2}{29}$$

قضیه هم پاسخی: کاربرد در شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان، بدون منابع وابسته و مستقل و بدون عنصری

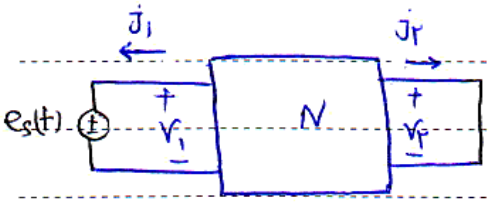
به نام ژیراتور و شرایط اولیه صفر. این قضیه سه نوع بیان دارد:

بیان ۱) خروجی یک شبکه N با مشخصات ذکر شده در ترمینال‌های الف و ب منابع زیر را اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$j_2(t) = \hat{j}_1(t)$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

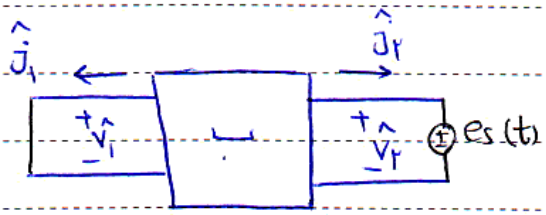
طبق قضیه تلگان:



(الف)

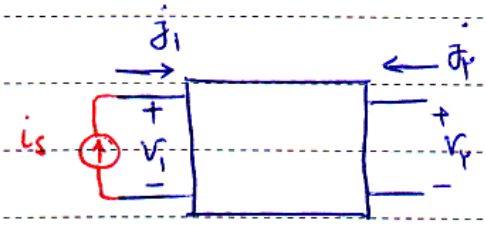
$$\underbrace{V_1}_{e_s}\hat{\dot{J}}_1 + \underbrace{V_2}_{0}\hat{\dot{J}}_2 = \underbrace{\hat{V}_1}_{0}\dot{J}_1 + \underbrace{\hat{V}_2}_{e_s}\dot{J}_2$$

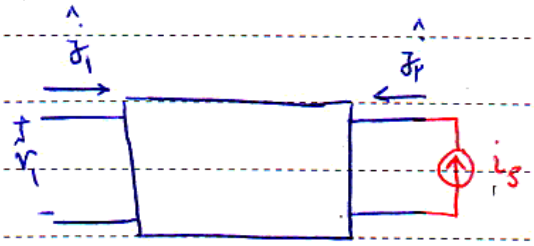
$$e_s\hat{\dot{J}}_1 = e_s\dot{J}_2 \longrightarrow \hat{\dot{J}}_1 = \dot{J}_2$$



مثال ۲)

طبق قضیه تلگان:

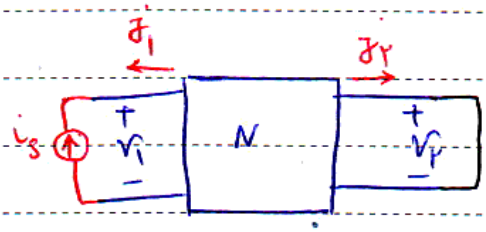




$$\underbrace{V_1}_{0}\hat{\dot{J}}_1 + \underbrace{V_2}_{i_s}\hat{\dot{J}}_2 = \underbrace{\hat{V}_1}_{i_s}\dot{J}_1 + \underbrace{\hat{V}_2}_{0}\dot{J}_2$$

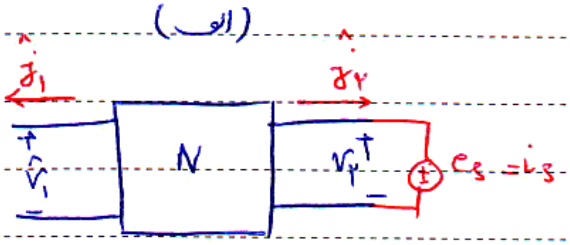
$$V_2 i_s = \hat{V}_1 i_s \longrightarrow V_2 = \hat{V}_1$$

مثال سوم: با استفاده از قضیه تلگان می‌توان نشان داد:



(الف)

$$\underbrace{V_1}_{0}\hat{\dot{J}}_1 + \underbrace{V_2}_{0}\hat{\dot{J}}_2 = \underbrace{\hat{V}_1}_{-i_s}\dot{J}_1 + \underbrace{\hat{V}_2}_{e_s}\dot{J}_2$$

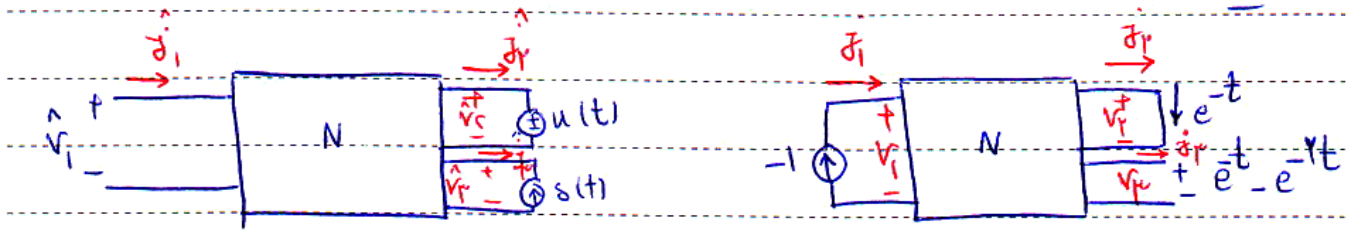


(ب)

$$-\hat{V}_1 i_s + i_s \dot{J}_2 = 0 \longrightarrow \hat{V}_1 = \dot{J}_2$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

مثال) در مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان شکل A ، اطلاعات زیر داده شده. اگر مدار را به صورت B درمی‌آوریم، ولتاژ $\hat{v}_1$ چیست؟



B A

چون قضیه هم‌پاسخی تحت شرایط خطی و تغییرناپذیر بودن با زمان است می‌توان برای آن قضیه‌ی متقابل را در حوزه‌ی لاپلاس بکار برد.

$$v_1\hat{j}_1+v_2\hat{j}_2+v_3\hat{j}_3=\hat{v}_1 j_1+\hat{v}_2 j_2+\hat{v}_3 j_3$$

$$0+0+\left(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)\times(-1)=\hat{v}_1\left(-\frac{1}{s}\right)+\left(\frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s+1}\right)+0$$

$$\frac{-1}{(s+1)(s+2)}=\hat{v}_1\times\frac{-1}{s}+\frac{1}{s(s+1)}$$

$$\frac{\hat{v}_1}{s}=\frac{1}{s(s+1)}+\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{s+2+s}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\hat{v}_1=\frac{2}{s+2}\longrightarrow \hat{v}_1(t)=2e^{-2t}u(t)$$

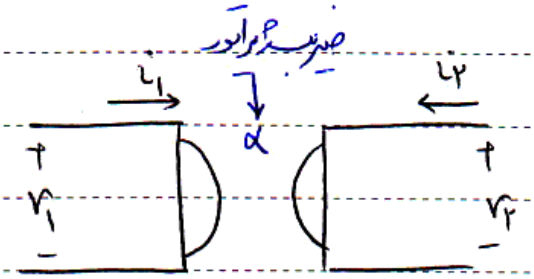
ترانسفورمیتور:

تعریف: هر شبکه‌ای که در قضیه هم‌پاسخی صدق کند، شبکه‌ی متقابل نامیده می‌شود.

$$\begin{cases} Z_{ij}=Z_{ji} \\ Y_{ij}=Y_{ji} \end{cases}$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

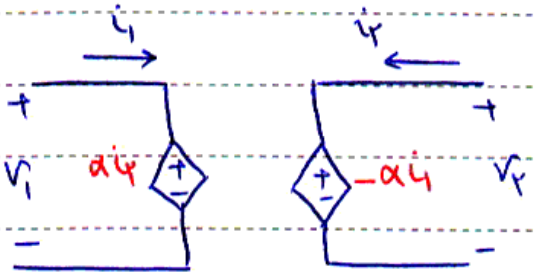
ژیراتور: یک عنصر غیرخطی و تغییرناپذیر با زمان است.



$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_2 \\ v_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} i_2 = \frac{1}{\alpha} v_1 \\ i_1 = \frac{-1}{\alpha} v_2 \end{cases}$$

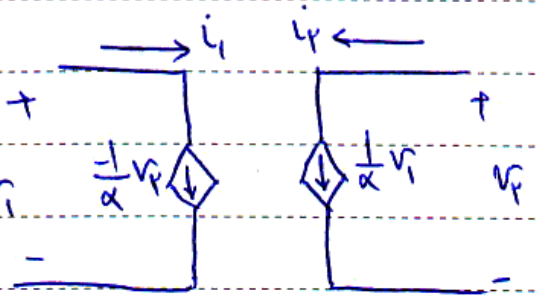
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

مدل کاربردی در آنالیزهای مش و حلقه‌ی اساسی:



$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{\alpha} \\ 1/\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

مدل کاربردی در آنالیزهای گره و کات‌ست اساسی:



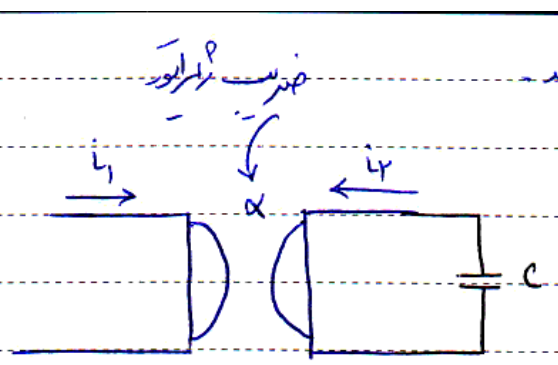
در ژیراتور:

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = \alpha i_2 i_1 - \alpha i_2 i_1 = 0$$

WWW.MOHANDESYAR.COM

مفهوم این رابطه این است که ژیراتور به شبکه توان نمی‌دهد.

مثال) عملکرد مدار زیر را شرح دهید؟



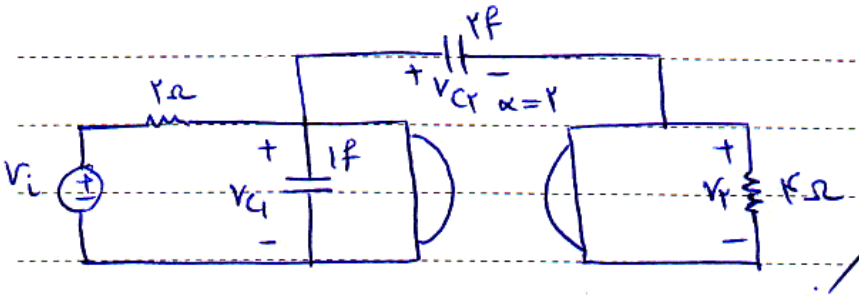
$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_2 \\ v_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow -i_2 = C\frac{dv_2}{dt}$$

$$\longrightarrow i_2 = -C\frac{dv_2}{dt}$$

$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_2 = -\alpha C\frac{dv_2}{dt} \\ v_2 = -\alpha i_1 \end{cases} \longrightarrow v_1 = -\alpha C\frac{d}{dt}(-\alpha i_1)$$

$$\longrightarrow v_1 = \underbrace{\alpha^2 C}_{L}\frac{di_1}{dt}$$

مثال) در مدار زیر:



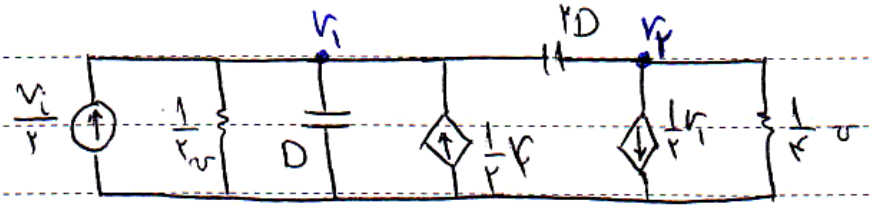
الف) فرکانس‌های طبیعی سیستم را بیابید؟

ب) تابع شبکه $\frac{V_o}{V_i}$ را بیابید؟

ج) اگر $v_i = 2\sin(t - 40)$ باشد، $V_o(t)$ را بیابید؟

از روش سیانه گره استفاده می‌کنیم.

WWW.MOHANDESYAR.COM



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+3D & -\frac{1}{2}-2D \\ -2D+\frac{1}{2} & 2D+\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_i}{2}+\cancel{\frac{1}{2}v_2} \\ \cancel{-\frac{1}{2}v_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3s+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}-2s \\ -2s+\frac{1}{2} & 2s+\frac{1}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_i}{2}+\overbrace{3v_1(0^-)-2v_2(0^-)}^{2v_{c2}(0^-)+v_{c1}(0^-)} \\ \underbrace{-2v_1(0^-)+2v_2(0^-)}_{-2v_{c2}(0^-)} \end{bmatrix}$$

$$v_1(0^-)-v_2(0^-)=v_{c2}(0^-) \qquad v_1(0^-)=v_{c1}(0^-)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{6s+1}{2} & -\frac{4s+1}{2} \\ -\frac{4s-1}{2} & \frac{8s+1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v_i}{2}+\overbrace{2}^{\text{شرایط اولیه}} \\ -1 \end{bmatrix}$$

دترمینان صفر

$$\frac{(6s+1)(8s+1)}{8}-\frac{(4s+1)(4s-1)}{4}=0$$

$$(6s+1)(8s+1)-2(4s+1)(4s-1)=0$$

$$48s^2+14s+1-16s^2+2=0 \longrightarrow 32s^2+14s+3=0 \begin{cases} s_1=___ \\ s_2=___ \end{cases}$$

برای بدست آوردن تابع شبکه شرایط اولیه را صفر می‌کنیم

WWW.MOHANDESYAR.COM